MATEMATICA - Esempio di prova per il Liceo Scientifico - MIUR - 20.12.2018

PROBLEMA 2 (soluzione di L. Tomasi)

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE EXPRESS sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di parallelepipedo a base quadrata, di volume 10 dm^3, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Determina il valore del lato b della base quadrata che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, tenendo presente la necessità che il volume sia 10 dm^3.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente, e inizia a fondere se lungo il percorso raggiunge la temperatura di 0°C.

2. Scegli, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni è più idonea per rappresentare il processo di riscaldamento prima dell'inizio della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura del ghiaccio all'istante $t = 0$, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t è il tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-Kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g).(1 - e^{-Kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{Kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

3. Poiché il parametro K varia in funzione di diversi fattori produttivi, c'è un'incertezza del 10% sul suo effettivo valore. Ritieni che questo determini una incertezza del 10% anche sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero? Motiva la tua risposta, in modo qualitativo o quantitativo.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente cilindrico, con raggio della base eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm.

4. Sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

Soluzione.

Punto 1.

Il volume dei blocchi di ghiaccio è 10 dm^3. Chiamato x il lato di base del parallelepipedo, il volume del blocco di ghiaccio è dato da: $b^2h = 10$. Ponendo $x = b$, si ha quindi $h = \frac{10}{x^2}$, con $x > 0$.

La superficie totale del parallelepipedo sarà:

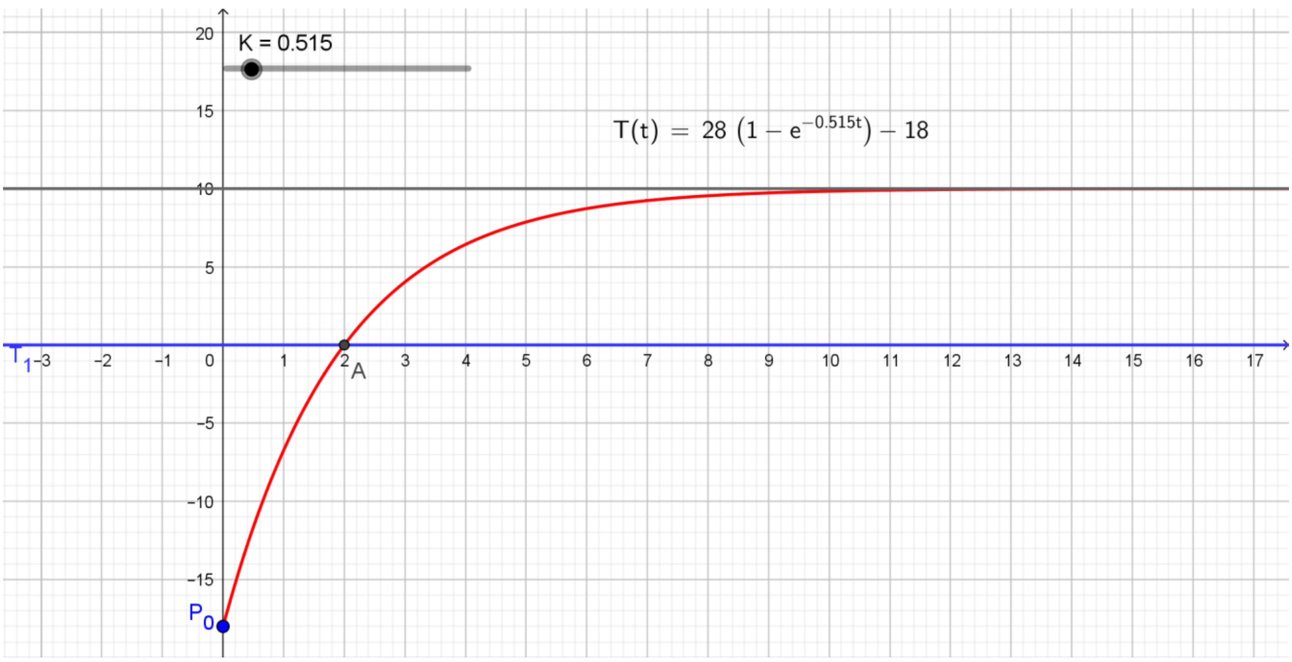
$S(x) = 2x^2 + 4x \cdot \frac{10}{x^2} = 2\left(x^2 + \frac{20}{x}\right)$, con $x > 0$.

La derivata prima è: $S'(x) = 2\left(2x - \frac{20}{x^2}\right) = 4\left(x - \frac{10}{x^2}\right) = 4\left(\frac{x^3 - 10}{x^2}\right)$.

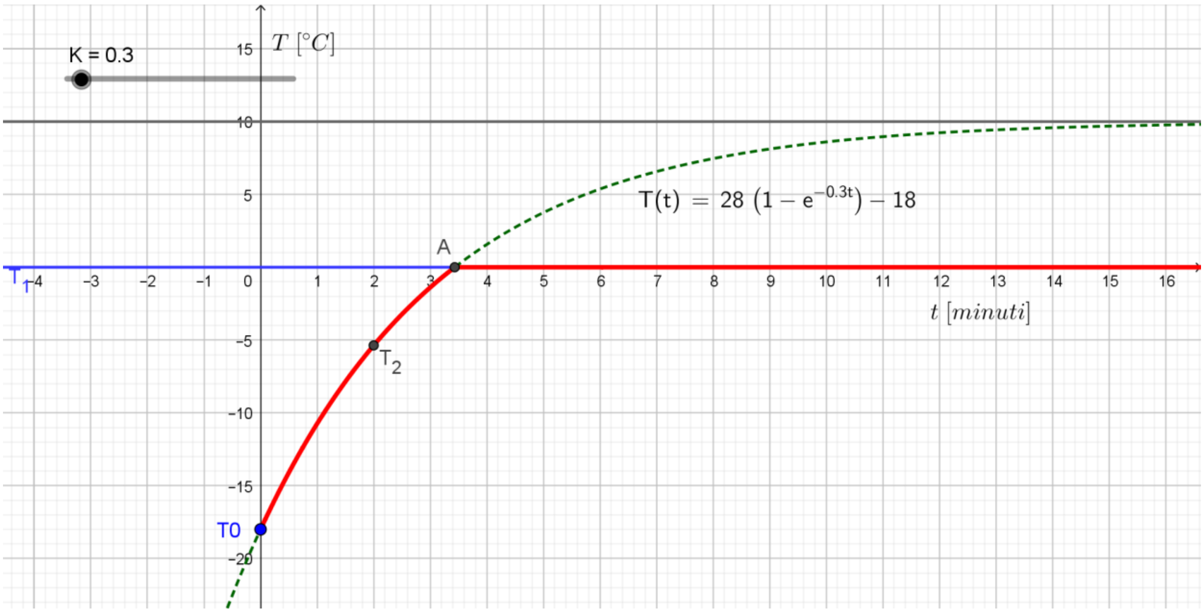
Si ha $S'(x) \geq 0$ per $x \geq \sqrt[3]{10}$. Quindi il minimo della superficie si ottiene per $x = \sqrt[3]{10}$. In questo caso si ha ovviamente $h = \sqrt[3]{10}$ e quindi il parallelepipedo rettangolo, come era prevedibile, deve essere un cubo.

Punto 2.

La funzione che esprime il "riscaldamento" del blocco di ghiaccio è la seconda, ovvero: $T(t) = (T_a - T_g) \cdot (1 - e^{-Kt}) + T_g$, con $t \geq 0$ e per $T \leq 0$. Si ottiene $T(t) = 28 \cdot (1 - e^{-Kt}) - 18$, con $t \geq 0$.



Abbiamo scartato le altre due funzioni perché sono contrarie alla situazione fisica descritta. Con la prima funzione, la temperatura del blocco di ghiaccio tenderebbe a 28 °C partendo da 0° C. Con la terza funzione proposta il blocco di ghiaccio partirebbe dalla temperatura di $-10°C$.
Si tratta di un'esponenziale crescente nella prima parte del riscaldamento e poi, una volta che il blocco ha raggiunto la temperatura di 0°C, di una funzione costante con $T = 0°C$. Il grafico di questa funzione è il seguente (dove abbiamo fissato K=0.3).



Per determinare il valore del parametro K affinché il ghiaccio non inizi a fondere, occorre calcolare $T(2)$, la temperatura raggiunta dopo 2 minuti, da $T(t) = \left(T_a - T_g\right)\cdot\left(1 - e^{-2K}\right) + T_g$ e poi supporre $T(2) < 0$, ovvero

$28\cdot\left(1 - e^{-2K}\right) - 18 < 0$.

Risolvendo questa disequazione esponenziale, si ottiene:

$$28\cdot\left(1 - e^{-2K}\right) - 18 < 0$$

$$28\cdot\left(1 - e^{-2K}\right) < 18$$

$$1 - e^{-2K} < \frac{9}{14}$$

$$e^{-2K} > \frac{5}{14}$$

$$-2K > \ln\left(\frac{5}{14}\right)$$

$$K < -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{5}{14}\right)$$

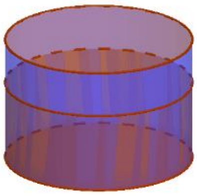
$$K < \ln\sqrt{\frac{14}{5}}$$

$$K < 0{,}515...$$

Passati i 2 minuti, con K=0,515, la temperatura rimane a 0° C (temperatura di fusione del ghiaccio alla pressione di 1 atm).

Punto 3.
Si suppone un'incertezza del 10% sul valore di $K = 0,515$. Quindi $dK = 0,0515$.
Calcoliamo il differenziale della temperatura raggiunta dopo 2 minuti, rispetto a *K*:
$dT = d\left(28 \cdot \left(1 - e^{-2K}\right) - 18\right) = T'(K) \cdot dK = 56 \cdot e^{-2K} \cdot dK$.
Sostituendo il valore di $K = 0,515$ e $dK = 0,0515$, si ottiene circa
$dT = 56 \cdot e^{-2K} dK = 56 \cdot e^{-1,03} \cdot 0,0515 \approx 1,03°\text{C}$.
Una incertezza del 10% sul parametro *K*=0,515 porta alla incertezza di circa 1,03°C sulla temperatura finale raggiunta dal blocco di ghiaccio in 2 minuti, se il blocco non è già arrivato alla temperatura di 0°C. Se $T_2 = 0°\text{C}$ l'incertezza sulla temperatura finale raggiunta… non c'è, perché quando il ghiaccio comincia a sciogliersi rimane a 0°C (alla pressione di 1 atm).
Se cambiamo il valore del parametro K, per esempio poniamo $K = 0,3$ (significa che le condizioni ambientali sono diverse, con il blocco di ghiaccio che si "riscalda" di meno), la temperatura del blocco di ghiaccio dopo 2 minuti sarà $T_2 = -5,37°C$. Pertanto con una incertezza del 10% su K, si ha circa:
$dT = 56 \cdot e^{-2K} dK = 56 \cdot e^{-0,6} \cdot 0,03 \approx 0,92°\text{C}$.
Quindi si ha un'incertezza percentuale $\left|\frac{dT}{T}\right| = \frac{0,92}{5,37} = 0,17 = 17\%$ sulla temperatura.
Quindi l'incertezza percentuale sulla temperatura $\left|\frac{dT}{T}\right|$ dipende dalla temperatura *T* raggiunta dal blocco di ghiaccio in 2 minuti. La risposta a questa domanda è: no. Una variazione del 10% di *K* non provoca in generale una variazione del 10% della temperatura del blocco di ghiaccio.

Punto 4



Se *x* è il volume d'acqua per ottenere un blocco di 10 dm^3 di ghiaccio, sappiamo che
$x + 0,0905x = 10$
$1,0905\,x = 10$
Quindi
$V_{acqua} = x = \frac{10}{1,0905} = 9,17 \text{ dm}^3 = 9,17 \text{ L}$.
Il volume del cilindro è:
$V = \pi \cdot (1,5)^2 \cdot 2 \approx 14,14 \text{ L}$.
Il recipiente è quindi ampiamente in grado di contenere l'acqua per produrre il blocco di ghiaccio di 10 dm^3.
L'altezza raggiunta dall'acqua nel cilindro sarà: $h = \frac{V_{acqua}}{\pi \cdot (1,5)^2} \approx 1,3 \text{ dm}$.

Giudizio sul problema

Livello di difficoltà	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☒ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☐ Sì	☐ No	☒ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR (Quadro di Riferimento)	☐ Sì	☒ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto?	☐ Sì	☒ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	☒ No	☐ Non sempre	☐ Sempre		
Formulazione	☐ Scorretta	☒ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☐ Solo parzialmente	☒ No		
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		

Commento: I punti 2 e 3 del problema sembrano più di Fisica che di Matematica.

Nota. Ringrazio G. Badoer per la segnalazione di un errore.