

Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 20 settembre 2018

QUESITO 5 - soluzione di L. Tomasi

5. Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

le rette $y = 2$, $x = 5$ e l'asse y .

Soluzione

La funzione $f(x)$ è definita sui reali, interseca l'asse x nel punto $A(-\frac{1}{2}, 0)$ e l'asse y nel punto $B(0,1)$.

La funzione è positiva per $x > -\frac{1}{2}$ e negativa per $x < -\frac{1}{2}$.

Si vede facilmente che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.

La derivata prima è data da

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + x + 1) - (2x + 1)^2}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{2x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

il cui segno è indicato nel seguente schema:

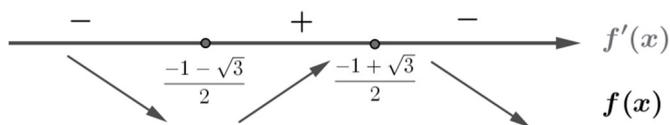


figura 1

Quindi il punto $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ è un punto di minimo relativo (e assoluto) e il punto $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ è un punto di massimo relativo (e assoluto). Il grafico è riportato in figura 2.

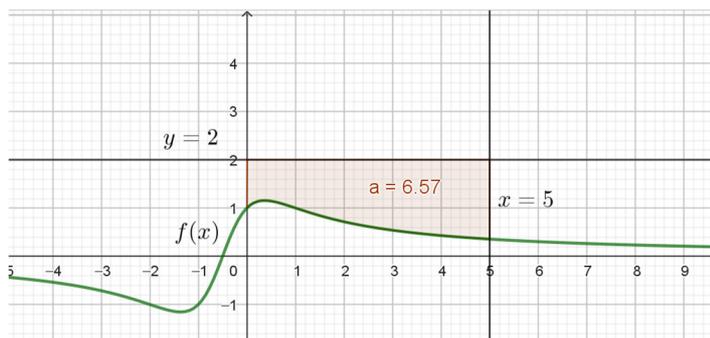


figura 2

Calcoliamo una primitiva generica di questa funzione, ottenendo

$$f'(x) = \int (-10x^3 + 12x)dx = -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2 + c_1.$$

Poiché deve trattarsi di un unico flesso a tangente orizzontale imponiamo $f'(0) = 0$ e si ha $c_1 = 0$. Calcoliamo l'area richiesta come differenza tra l'area del rettangolo e l'area del trapezoide formato dalla funzione. Si ottiene

$$S = 10 - \int_0^5 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = 10 - [\ln(x^2 + x + 1)]_0^5 = 10 - \ln 31 \approx 6,57.$$

Argomento: Analisi matematica, integrale definito.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	<input checked="" type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente