

QUESITO 7 - soluzione di L. Tomasi

7. La variabile casuale x ha densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } x \in [0, 1/2] \\ \frac{7}{12} & \text{per } x \in [1/2, 3/2] \\ \frac{1}{2} & \text{per } x \in [3/2, 2] \end{cases} ;$$

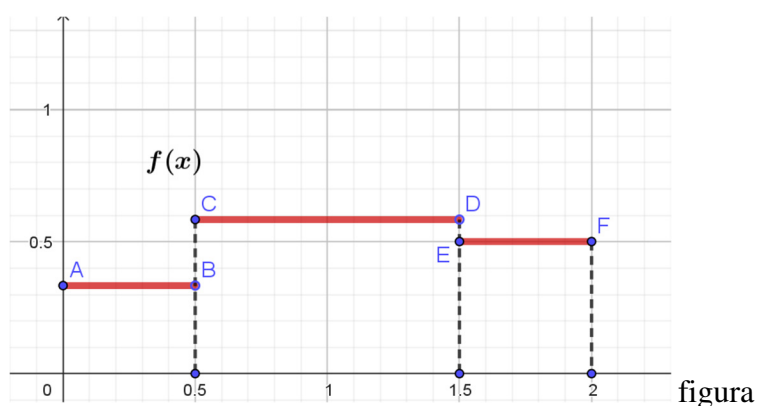
determinare la media e la mediana della variabile casuale x .

Soluzione

Osservazione iniziale. Il testo contiene degli errori perché una funzione non può avere due valori diversi in uno stesso punto. Inoltre la variabile casuale dovrebbe essere indicata con una X maiuscola e non minuscola come nel testo.

Ridefiniamo pertanto la funzione $f(x)$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{7}{12} & \text{per } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{per } \frac{3}{2} \leq x < 2 \end{cases}$$



La funzione $f(x)$ è effettivamente la funzione densità di probabilità di una variabile casuale X perché si ha

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 1.$$

La media della variabile casuale X è data da

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} xf(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 xf(x)dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{7}{12} x dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{2} x dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{7}{12} x dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{2} x dx = \\ &= \left[\frac{1}{6} x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{7}{24} x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{24} \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(4 - \frac{9}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{24} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{24} + \frac{7}{12} + \frac{7}{16} = \frac{51}{48} = \frac{17}{16}. \end{aligned}$$

Quindi $M(x) = \frac{17}{16}$.

La mediana è definita dalla seguente equazione

$$\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Sappiamo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$

Quindi $m > \frac{1}{2}$.

Inoltre sappiamo che

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \frac{9}{12} > \frac{1}{2}.$$

Pertanto si ha

$$\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

Ora siamo in grado di risolvere l'equazione:

$$\begin{aligned} \int_0^m f(x)dx &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} + \left(m - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{7}{12} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{12}m - \frac{7}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{12}m = \frac{15}{24}$$

$$m = \frac{15}{14}$$

Quindi la mediana è $m = \frac{15}{14}$.

Argomento: calcolo delle probabilità, variabili casuali continue, media, mediana.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☒ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☐ Sì		☐ No		☒ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì		☐ No		☒ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ Sì		☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì		☐ No		☐ Parzialmente