

QUESITO 9- soluzione di L. Tomasi

9. Considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x}$$

definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a . Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3.

Soluzione

Osservazione. Nel testo si afferma che il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, ma ovviamente questo è errato. Il dominio è formato dai reali non nulli.

Essendo $x \neq 0$ la funzione data si può scrivere anche nella forma

$$f(x) = a + \frac{1}{x}$$

Il grafico di questa funzione parametrica è un'iperbole equilatera di asintoti l'asse y e la retta di equazione $y = a$, ottenuto tramite una traslazione di vettore $(0, a)$ dell'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$. Il centro di simmetria del grafico è pertanto il punto $C(0, a)$.

La derivata di tutte queste funzioni è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Indichiamo con A il punto di ascissa 1; quindi $A(1, a + 1)$

Indichiamo con B il punto di ascissa -1 ; quindi $B(-1, a - 1)$.

La retta tangente in A ha equazione

$$y - (a + 1) = -1(x - 1)$$

ossia

$$y = -x + a + 2.$$

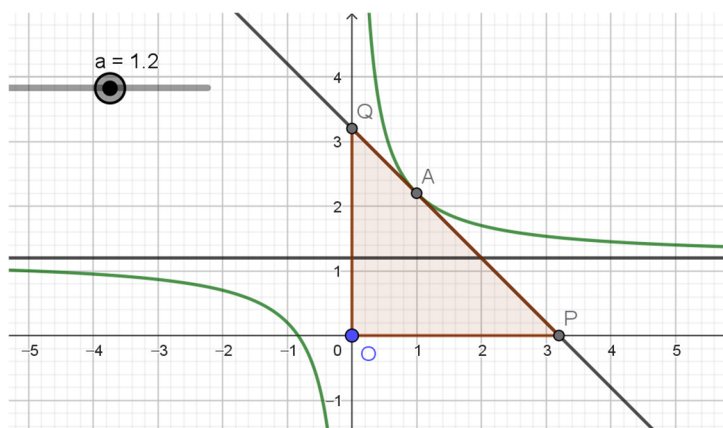
La retta tangente in B ha equazione

$$y - (a - 1) = -1(x + 1)$$

ossia

$$y = -x + a - 2.$$

Pertanto le due rette tangenti richieste sono entrambe parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.



Intersechiamo la retta tangente alla curva nel punto $A(1, 1 + a)$ con gli assi cartesiani.

Otteniamo i punti $P(a + 2, 0)$ e il punto $Q(0, a + 2)$.

L'area del triangolo (rettangolo e isoscele) OPQ è pertanto

$$S(a) = \frac{1}{2}(a + 2)^2.$$

Dobbiamo imporre che quest'area sia maggiore di 3. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a + 2)^2 &> 3 \\ (a + 2)^2 &> 6 \end{aligned}$$

ossia

$$a + 2 < -\sqrt{6} \quad \text{oppure} \quad a + 2 > \sqrt{6}$$

e in definitiva

$$a < -2 - \sqrt{6} \quad \text{oppure} \quad a > 2 + \sqrt{6}.$$

Argomento: Geometria analitica; iperbole (analisi).

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☒ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☒ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta ☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☒ No	☐ Non sempre	☐ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No	
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente	