Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 5 luglio 2018

PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi

Fissato un numero reale $k>0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x)=k\cdot\ln(x) \text{ e } g_k(x)=e^{\frac{x}{k}},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k>0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

$$a(x)=f_k(g_k(x)) \text{ e } b(x)=g_k(f_k(x)),$$

stabilisci se si verifica $a(x)=b(x), \forall x\in\Re$.

2. Indicata con r la retta di equazione $y=x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x)=2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x)=e^{\frac{x}{2}}$.
Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.
3. Verifica che l'equazione $f_3(x)=g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k>0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y=x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k>0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.
4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani.
Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

Soluzione

Fissato un numero reale $k>0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x)=k\cdot\ln(x) \text{ e } g_k(x)=e^{\frac{x}{k}},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

Consideriamo la famiglia di funzioni

$$f_k(x)=k\cdot\ln(x)$$

il cui dominio è formato dai numeri reali positivi, e le funzioni

$$g_k(x)=e^{\frac{x}{k}}$$

che hanno per dominio l'insieme $\mathbb{R}$.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

$$a(x) = f_k(g_k(x)) \text{ e } b(x) = g_k(f_k(x)),$$

stabilisci se si verifica $a(x) = b(x), \forall x \in \Re$.

Poiché $k > 0$, le funzioni $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$, sono crescenti in senso stretto e pertanto sono invertibili. In questo caso possiamo calcolare per ogni $k > 0$ la funzione inversa. Si ha:

$$y = k \ln x$$

da cui si ricava

$$\frac{y}{k} = \ln x$$

e pertanto

$$x = e^{\frac{y}{k}}$$

e, scambiando le variabili (indichiamo con x la variabile indipendente e con y quella dipendente),

$$y = e^{\frac{x}{k}}.$$

Pertanto abbiamo dimostrato che la funzione

$$g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$$

è la funzione inversa di

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x).$$

Il dominio della funzione $g_k(x)$ è quindi $\mathbb{R}$, ossia il codominio della funzione $f_k(x)$. La funzione $g_k(x)$ sarà crescente e il suo grafico sarà il simmetrico del grafico della $f_k(x)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (figura 1).

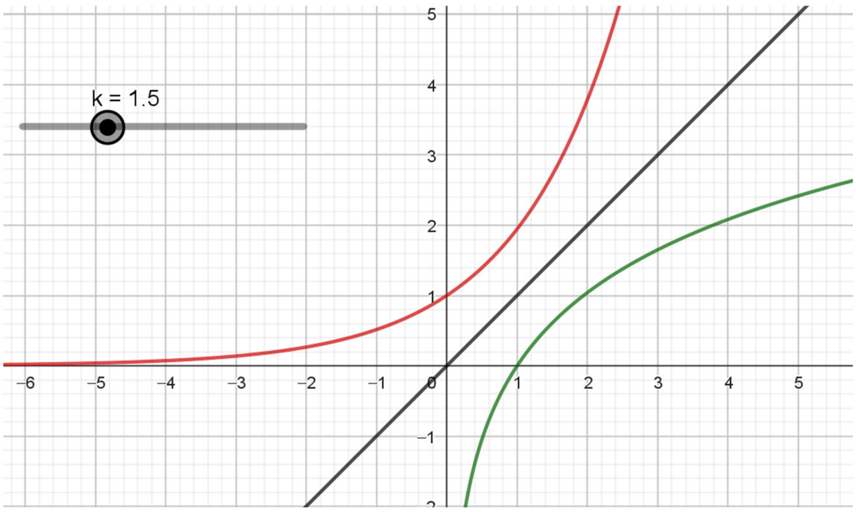

figura 1

Consideriamo la funzione composta:

$$a(x) = f_k(g_k(x))$$

il cui schema di composizione è il seguente:

$$x \longmapsto g_k(x) \longmapsto \; f_k(g(x))$$

$$x \longmapsto e^{\frac{x}{k}} \longmapsto k \ln e^{\frac{x}{k}}$$

$$x \longmapsto e^{\frac{x}{k}} \longmapsto k \cdot \frac{x}{k} \ln e$$

$$x \longmapsto e^{\frac{x}{k}} \longmapsto x$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi.

Il dominio di questa funzione è $\mathbb{R}$. La funzione $a(x)$ è quindi l'identità sui numeri reali ed ha per grafico la retta di equazione $y = x$.

Consideriamo la funzione composta:

$$b(x) = g_k(f_k(x))$$

il cui schema di composizione è il seguente:

$$x \longmapsto f_k(x) \longmapsto \; g_k(f_k(x))$$

$$x \longmapsto k \ln x \longmapsto \; e^{\frac{k \ln x}{k}}$$

$$x \longmapsto k \ln x \longmapsto \; e^{\ln x}$$

$$x \longmapsto k \ln x \longmapsto \; x$$

$$\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi. Il dominio di questa funzione è $\mathbb{R}^+$. La funzione $b(x)$ è quindi l'identità sui numeri reali positivi.

Quindi la funzione $b(x)$ è una restrizione della funzione $a(x)$ ai reali positivi.

Punto 2)

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.

Si ha

$$f_2'(x) = \frac{2}{x}$$

Quindi

$$\frac{2}{x} = 1$$

Si ottiene pertanto $x = 2$.

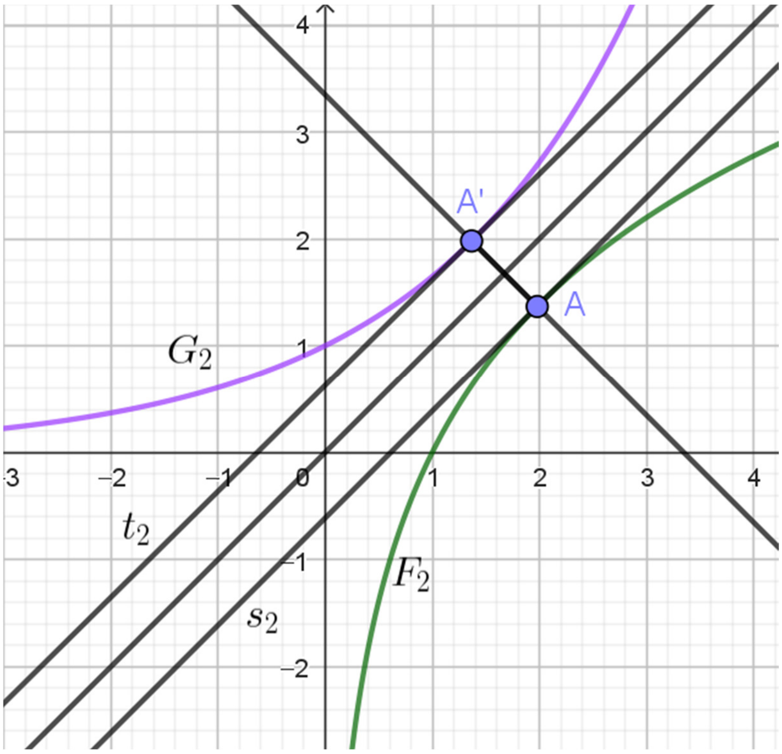

figura 2

Quindi il punto A ha coordinate $(2, 2\ln 2)$, ovvero $(2, \ln 4)$.

Il punto A' di conseguenza ha coordinate $(\ln 4, 2)$.

La distanza tra questi due punti (figura 2) realizza la minima distanza tra due punti dei grafici:

$$AA' = \sqrt{2(2 - \ln 4)^2} = \sqrt{2}(2 - \ln 4) \approx 0{,}868.$$

Punto 3)

3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.

Per $k = 3$ si ottiene la figura 3, dove si vede che i grafici si intersecano in due punti distinti, che sono i punti di intersezione tra la retta di equazione $y = x$ con uno dei due grafici.

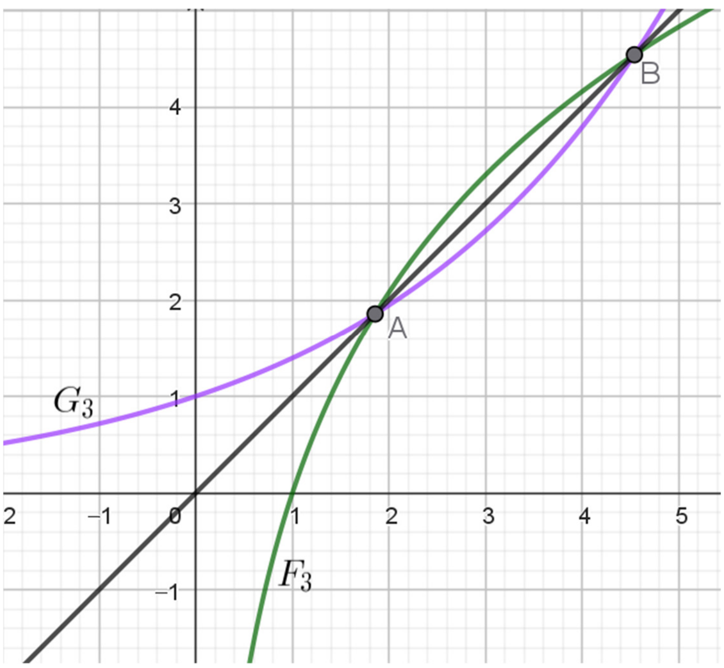

figura 3

I due grafici sono invece tangenti per $k = e$.

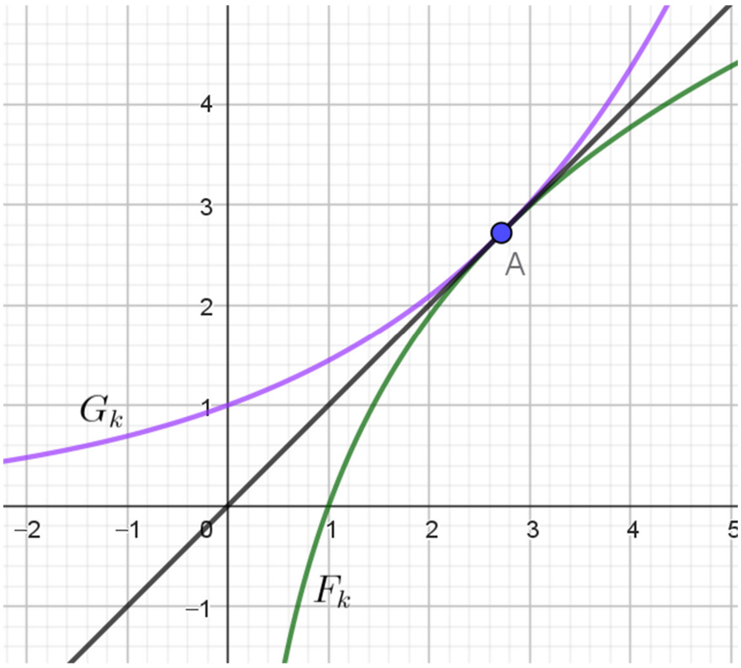

figura 4

Supponiamo che i due grafici siano tangenti tra loro. Pertanto la retta tangente nel punto di tangenza deve essere $y = x$.

Quindi

$$f_k'(x) = \frac{k}{x} = 1$$

Ne segue che in tale punto deve essere $x = y = k$.

D'altronde deve essere

$$g_k'(x) = \frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}} = 1$$

Quindi si ha

$$e^{\frac{x}{k}} = k$$

e poiché

$$x = k$$

si ha

$$e = k.$$

Quindi il punto di tangenza ha coordinate $A(e, e)$ e questo punto si ottiene per $k = e$.

I due grafici sono secanti per $k > e$; non si intersecano per $0 < k < e$.

Infatti possiamo considerare la funzione ausiliaria (differenza tra la funzione $y = x$ e la funzione $y = f_k(x)$):

$$d_k(x) = f_k(x) - x = k \ln(x) - x$$

definita sui reali positivi.

La sua derivata prima è

$$d_k{}'(x) = \frac{k}{x} - 1$$

Ha quindi un massimo relativo (e assoluto) per $x = k$.

Il valore del massimo della funzione $d_k(x)$ è

$$d_k(k) = k \ln(k) - k = k(\ln k - 1)$$

Poiché $k > 0$, questo massimo è nullo se e solo se $\ln k = 1$, ossia se $k = e$ (figura 5).

Per $k > e$, il grafico della funzione $d_k(x)$ è secante con l'asse delle ascisse e l'equazione

$$f_k(x) = x$$

ha due soluzioni reali e distinte.

Per $k < e$, il grafico della funzione $d_k(x)$ non interseca l'asse delle ascisse e l'equazione

$$f_k(x) = x$$

non ha soluzioni reali.

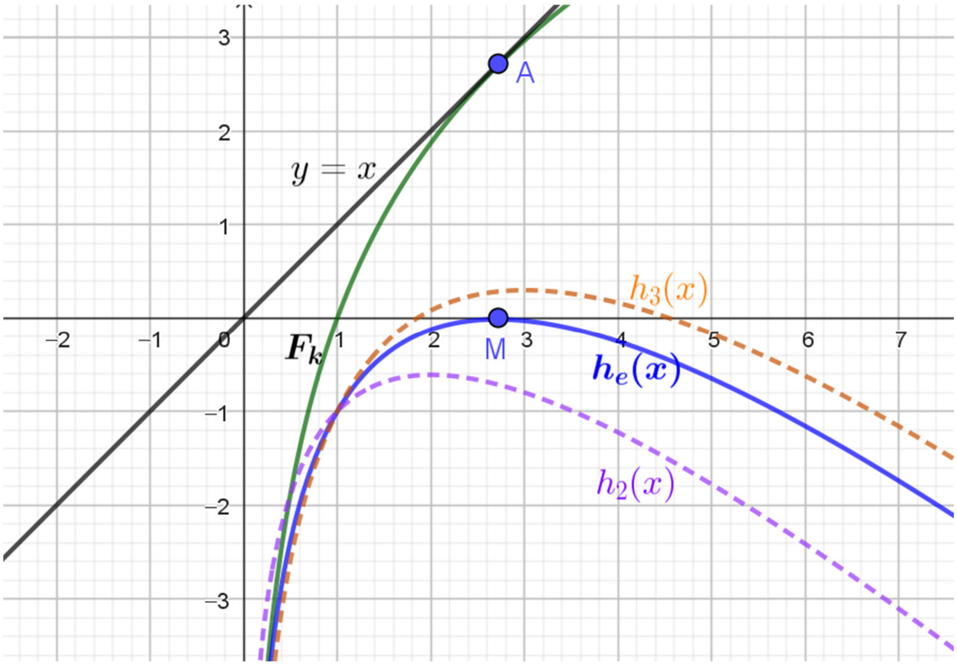

figura 5

Punto 4)

4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani.
Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

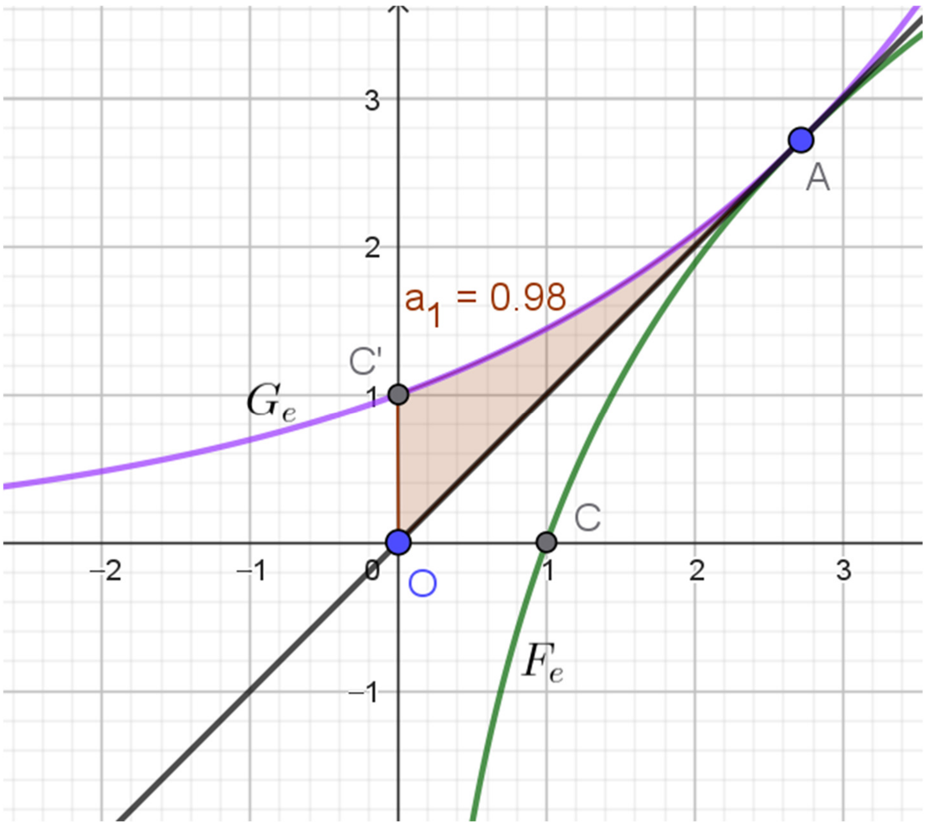

figura 6

L'area A richiesta è uguale al doppio dell'area del triangolo mistilineo OAC' (perché il triangolo mistilineo OCA è congruente al triangolo mistilineo OAC'). Si ha quindi

$$S = 2 \cdot \int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}} - x\right) dx = 2 \cdot \left[e \cdot e^{\frac{x}{e}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^e = 2\left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 - e\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}e^2 - e\right) = e^2 - 2e = e(e-2) \approx 1{,}95.$$

Data la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante dei grafici, si ottiene lo stesso solido ruotando la regione *A* di un giro completo attorno all'asse *x* oppure ruotandola attorno all'asse *y*. Ruotando la regione *A* attorno all'asse *x* (figura 7) si ottiene il volume:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}}\right)^2 dx - \pi \int_1^e e(\ln x)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^e e^{\frac{2x}{e}}\, dx - \pi e \int_1^e (\ln x)^2 dx\,.$$

Calcoliamo prima gli integrali indefiniti

$$I_1 = \int e^{\frac{2x}{e}}\, dx = \frac{e}{2}\int \frac{2}{e} e^{\frac{2x}{e}}\, dx = \frac{e}{2} \cdot e^{\frac{2x}{e}} + c$$

$$I_2 = \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot 2\frac{1}{x}\ln x\, dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx =$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\left(x \ln x - \int dx\right) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c.$$

Si ha pertanto

$$\int_0^e e^{\frac{2x}{e}}\, dx = \frac{e}{2}\left[e^{\frac{2x}{e}}\right]_0^e = \frac{e}{2}(e^2 - 1)$$

e

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x]_1^e =$$

$$= e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

Si ottiene finalmente

$$V = V_1 - V_2 = \pi\frac{e}{2}(e^2 - 1) - \pi e(e - 2) = \pi e\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - e + 2\right) =$$

$$= \pi e\left(\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{3}{2}\right) \approx 21{,}146.$$

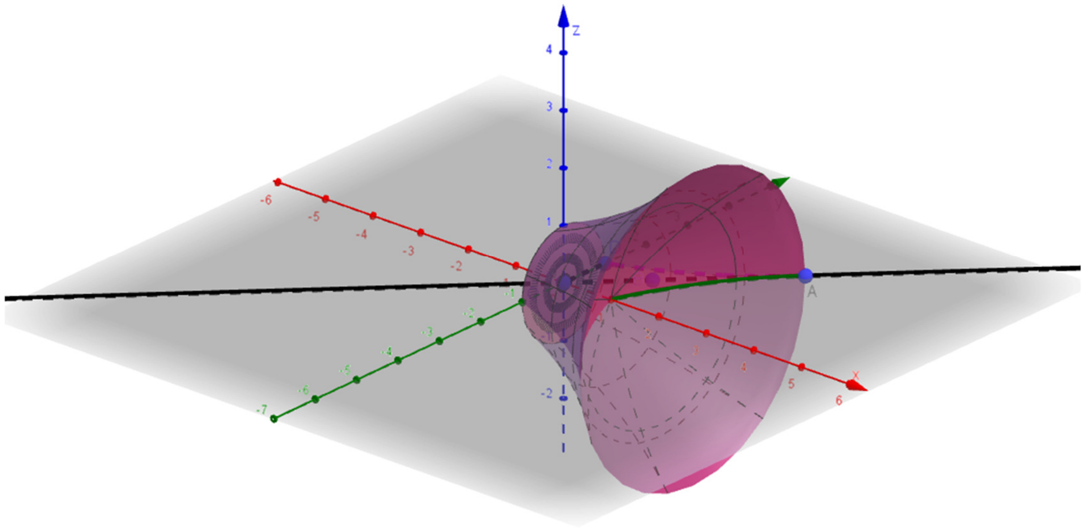

figura 7

Argomenti: Analisi matematica; funzioni inverse, composizione di funzioni, integrali; integrazione per parti (due volte); aree, volume di un solido di rotazione.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☒ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
Sono argomenti presenti nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		