

Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 5 luglio 2018

QUESITO 1 - soluzione di L. Tomasi

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi,0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y=4\sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB .

Soluzione

Disegniamo il grafico della funzione $f(x) = 4 \sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$. Il massimo di questa funzione si ha per $x = \frac{\pi}{2}$ e vale 4.

Intersechiamo il grafico con una retta di equazione $y = k$, con $0 \leq k \leq 4$. La retta interseca la sinusoide le cui ascisse sono le soluzioni dell'equazione $4 \sin x = k$, ossia

$$\sin x = \frac{k}{4}$$

che ha per soluzioni

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{k}{4}\right) \quad \text{e} \quad x_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{k}{4}\right).$$

Il perimetro del rettangolo è pertanto

$$2p = 2k + 2\left(\pi - 2 \arcsin\left(\frac{k}{4}\right)\right).$$

Pertanto il semiperimetro è

$$p(k) = k + \pi - 2 \arcsin\left(\frac{k}{4}\right).$$

Calcolando la derivata prima, si ha:

$$p'(k) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{16}}}$$

ossia

$$p'(k) = 1 - \frac{2}{\sqrt{16 - k^2}}.$$

Risolvendo la disequazione $p'(k) \geq 0$ si trova

$$\sqrt{16 - k^2} \leq 4$$

che fornisce

$$0 \leq k \leq 2\sqrt{3}.$$

In questo intervallo il perimetro è crescente. Quindi il perimetro è massimo per $k = 2\sqrt{3}$ e il perimetro massimo vale

$$2p = 4\sqrt{3} + 2\left(\pi - 2 \arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)\right) = 4\sqrt{3} + 2\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \approx 9,023.$$

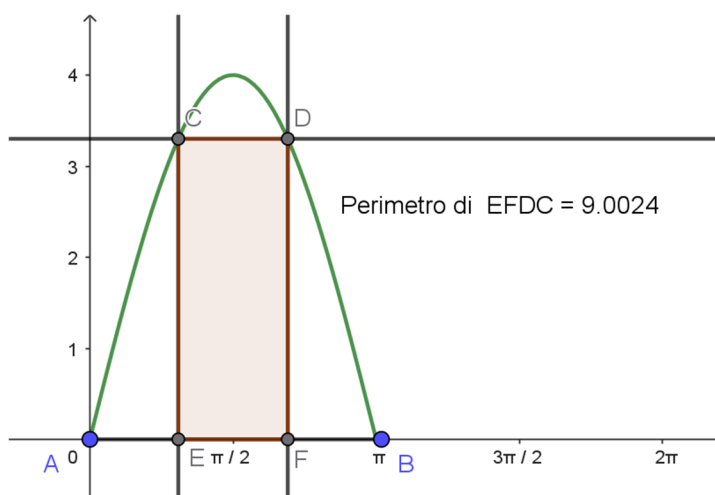


Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì		☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ Sì		☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì		☐ No		☐ Parzialmente