Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 5 luglio 2018

QUESITO 4 - soluzione di L. Tomasi

4. Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx.$$

Soluzione

Calcoliamo prima il seguente integrale indefinito:

$$\int \cos^n x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos^{n-2} x dx = \int \cos^{n-2} x dx + \int \sin x (-\sin x) \cos^{n-2} x dx. \quad (*)$$

Calcoliamo ora, per parti, l'integrale

$$\int \sin x (-\sin x) \cos^{n-2} x dx.$$

Consideriamo $\sin x$ come “fattore finito” e $(-\sin x) \cos^{n-2} x dx$ come “fattore differenziale.

Si ha:

$$\int \sin x (-\sin x) \cos^{n-2} x dx = \sin x \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \cos^{n-1} x + \frac{1}{n-1} \int \cos^n x dx.$$

Sostituendo nell'integrale (*), si ha:

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x dx + \frac{1}{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \boxed{\frac{1}{n-1} \int \cos^n x dx}.$$

Portando nella prima parte l'integrale evidenziato, si ottiene:

$$\int \cos^n x dx + \boxed{\frac{1}{n-1} \int \cos^n x dx} = \int \cos^{n-2} x dx + \frac{1}{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-1} x,$$

ossia

$$\frac{n}{n-1} \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x dx + \frac{1}{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-1} x.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\frac{n-1}{n}$, si ha infine:

$$\int \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx + \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x.$$

Ne segue che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx + \left[\frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Ma

$$\left[\frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0;$$

pertanto otteniamo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx$$

come si doveva trovare:

Possiamo ora utilizzare il risultato trovato per calcolare:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx = \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{3}{8} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{16} \pi.$$

Argomento: integrali definiti per parti; integrali “araba fenice”.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta ☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì		☐ No	☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☐ Sì		☐ Solo parzialmente	☒ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☐ Sì		☒ No	☐ Parzialmente