Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 5 luglio 2018

QUESITO 7 - soluzione di L. Tomasi

7. Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e t.

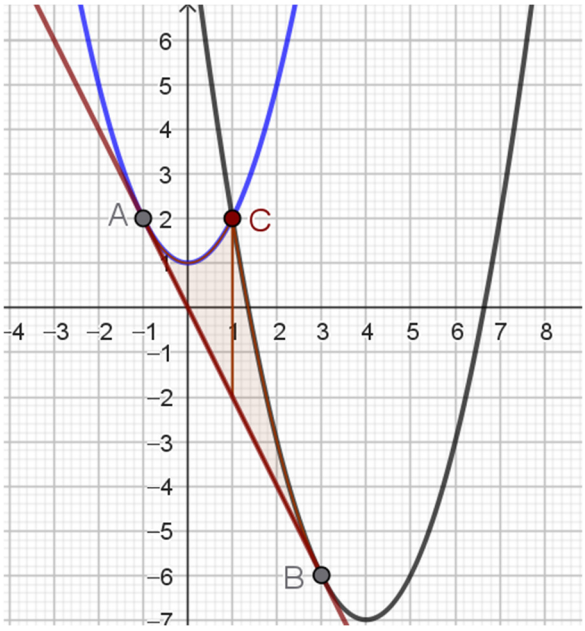
Soluzione

Indichiamo con $f(x) = x^2 + 1$ la funzione che ha per grafico la prima parabola e con $x = \alpha$ l'ascissa di un suo punto A. Essendo $f'(x) = 2x$, la retta tangente in un punto A alla parabola $y = x^2 + 1$ avrà equazione

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$
$$y - (\alpha^2 + 1) = 2\alpha(x - \alpha)$$

ossia

$$y = 2\alpha x - \alpha^2 + 1.$$



figura

Indichiamo con $g(x) = x^2 - 8x + 9$ e con $x = \beta$ l'ascissa di un punto B sulla seconda parabola. Essendo $g'(x) = 2x - 8$, la retta tangente in B avrà equazione

$$y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta)$$
$$y - (\beta^2 - 8\beta + 9) = (2\beta - 8)(x - \beta)$$
$$y = (2\beta - 8)(x - \beta) + (\beta^2 - 8\beta + 9)$$
$$y = (2\beta - 8)x - \beta^2 + 9.$$

Le due rette coincidono se e solo se hanno la stessa pendenza e la stessa intercetta sull'asse y:

$$\begin{cases} m = m' \\ q = q' \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2\alpha = 2\beta - 8 \\ -\alpha^2 + 1 = -\beta^2 + 9 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \beta = \alpha + 4 \\ -\alpha^2 + 1 = -\beta^2 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \alpha + 4 \\ -\alpha^2 + 1 = -\alpha^2 - 8\alpha - 16 + 9 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \beta = \alpha + 4 \\ 8\alpha + 7 = -1 \end{cases}$$

e finalmente

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{cases}.$$

Quindi si ottengono i punti $A(-1,2)$ e $B(3,-6)$ e la retta AB tangente comune alle due parabole ha equazione $y = -2x$.

Determiniamo il punto di intersezione tra le due parabole:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 8x + 9 \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} 8x = 8 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

e in definitiva

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

L'area richiesta è la somma delle aree di due domini normali rispetto all'asse *x* (figura):

$$S = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + 1 - (-2x)\right)dx + \int_{1}^{3} \left(x^2 - 8x + 9 - (-2x)\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx + \int_{1}^{3} (x^2 - 6x + 9)dx = \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_{1}^{3} =$$

$$= \frac{8}{3} + \left(9 - 27 + 27 - \frac{1}{3} + 3 - 9\right) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Argomento: geometria analitica; analisi matematica; area; integrali definiti.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No	
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente	