Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 5 luglio 2018

QUESITO 8 - soluzione di L. Tomasi

8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo [0, 10], è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{12}, & 1<x\le 10\end{cases}$$

Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è definita come segue

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{12}, & 1<x\le 10\end{cases}$$

Il grafico di $f(x)$ è il seguente.

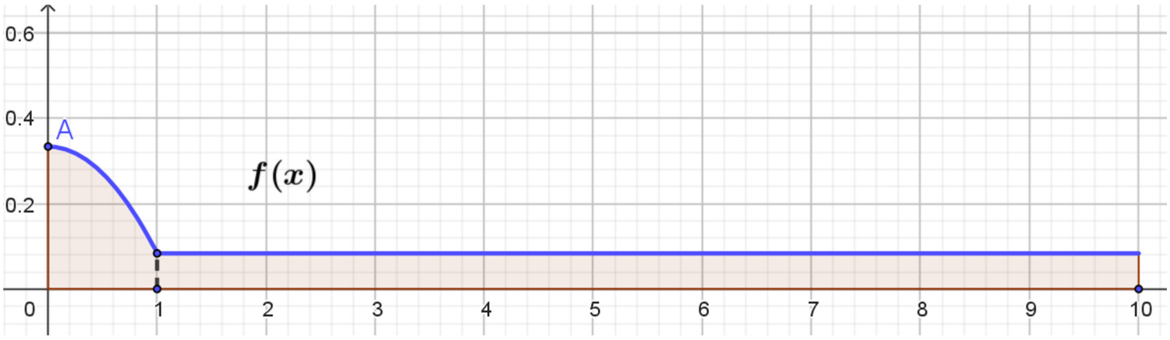

figura 1

La funzione $f(x)$ è effettivamente la funzione densità di probabilità di una variabile casuale X perché si ha

$$\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{10} f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx+9\cdot\frac{1}{12}=$$

$$=\left[\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^1+\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

La media della variabile casuale X è data da

$$M(X)=\int_0^{10} xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{10} xf(x)dx=$$

$$=\int_0^1 x\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^3\right)dx+\int_1^{10}\frac{1}{12}x\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{12}x^4\right)dx+\frac{1}{24}[x^2]_0^{10}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5\right]_0^1+\frac{100}{24}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{20}\right)+\frac{25}{6}=\frac{767}{180}\approx 4{,}22.$$

Quindi $M(x)=\frac{767}{180}\approx 4{,}22.$

La mediana è definita dalla seguente equazione

$$\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Sappiamo che

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

Quindi $m > \frac{1}{2}$.

Pertanto si ha

$$1 < m < 10.$$

Ora siamo in grado di risolvere l'equazione:

$$\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + (m-1) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}m - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{12}m = \frac{1}{3}$$

$$m = 4.$$

Quindi la mediana è $m = 4$ (figura 2).

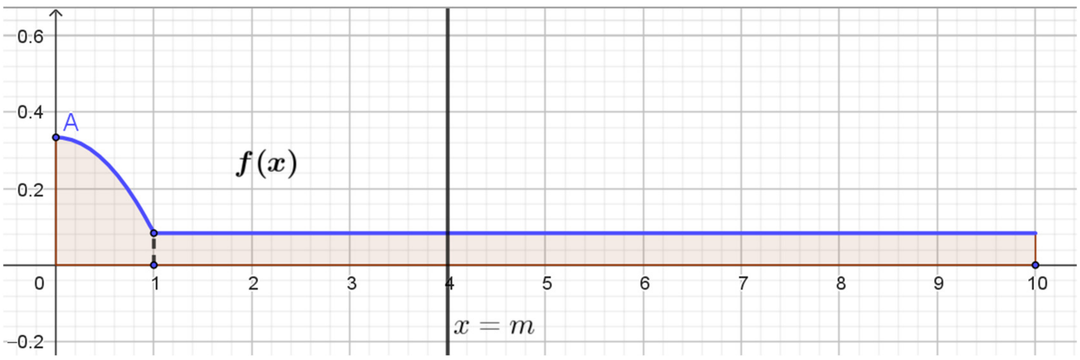

figura 2

Argomento: calcolo delle probabilità, variabili casuali continue, media, mediana.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì	☒ No	☒ Non sempre		

È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente