Esame di Stato 2019 – Liceo scientifico – 20 giugno 2019

Prova scritta di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 1 – soluzione a cura di D. Falciai e L. Tomasi

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x - x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

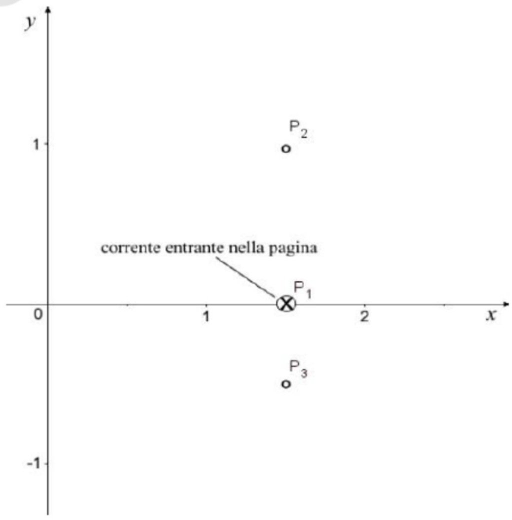
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

  Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.

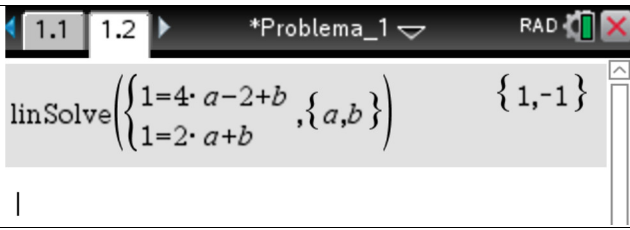


- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

Soluzione

Punto 1

La funzione $g(x)$, definita su R, tende a zero per x tendente a ±∞.	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$
La funzione $g(x)$ ammette un unico zero in $x = -\frac{b}{a}$ ed è positiva a destra e negativa a sinistra di tale zero; se in queste due regioni troviamo rispettivamente un minimo e un massimo relativi, questi saranno anche minimo e massimo assoluti. Si ha $g'(x) = e^{2x-x^2}(-2ax^2 + 2(a-b)x + 2b + a)$	

Scriviamo l'equazione $g'(x) = 0$, dopo aver semplificato per l'esponenziale:	$a + (ax + b)(2 - 2x) = 0$ $-2ax^2 + 2(a - b)x + 2b + a = 0$
Calcoliamo il discriminante della equazione trovata e troviamo un valore positivo per ogni scelta dei parametri a e b. L'equazione $g'(x) = 0$, ammette quindi sempre due soluzioni, ovvero $g(x)$ ha due punti stazionari, massimo e minimo relativi, che sono anche assoluti considerato l'andamento asintotico della funzione.	$\frac{\Delta}{4} = (a - b)^2 + 2a(2b + a)$ $= 3a^2 + 2ab + b^2$ $= 2a^2 + (a + b)^2 > 0$
Risolviamo in una pagina di calcolo della calcolatrice (TI-Nspire CX) il sistema lineare con le condizioni di passaggio per il punto $A(2,1)$ per trovare i valori richiesti dei parametri. Si trova: a=1 e b=-1.	

Punto 2

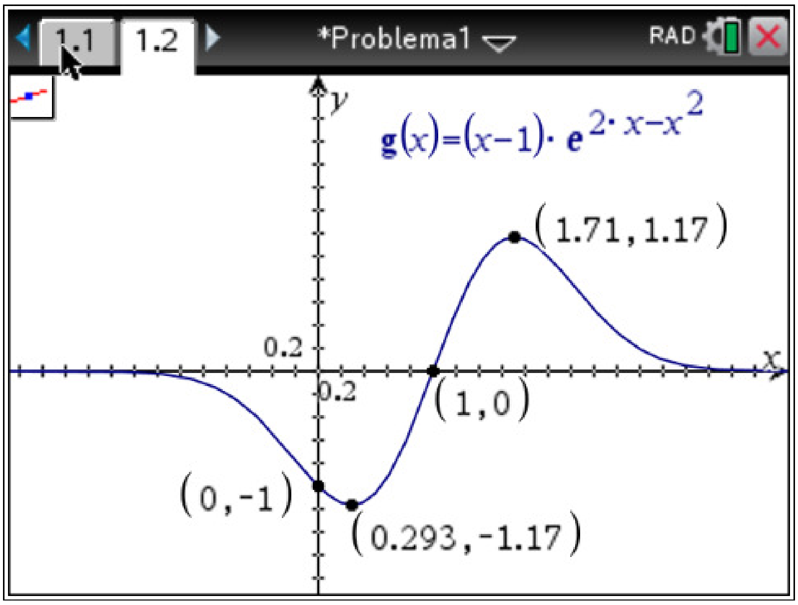
In base al punto precedente, otteniamo quindi che $f(x) = x^2 - x - 1$ e $g(x) = (x - 1)e^{2x - x^2}$.
Per verificare che il grafico di $g(x)$ ha il centro di simmetria nel punto $C(1,0)$, trasliamo la curva di 1 verso "sinistra". Si ottiene l'equazione

$$y = g(x + 1)$$

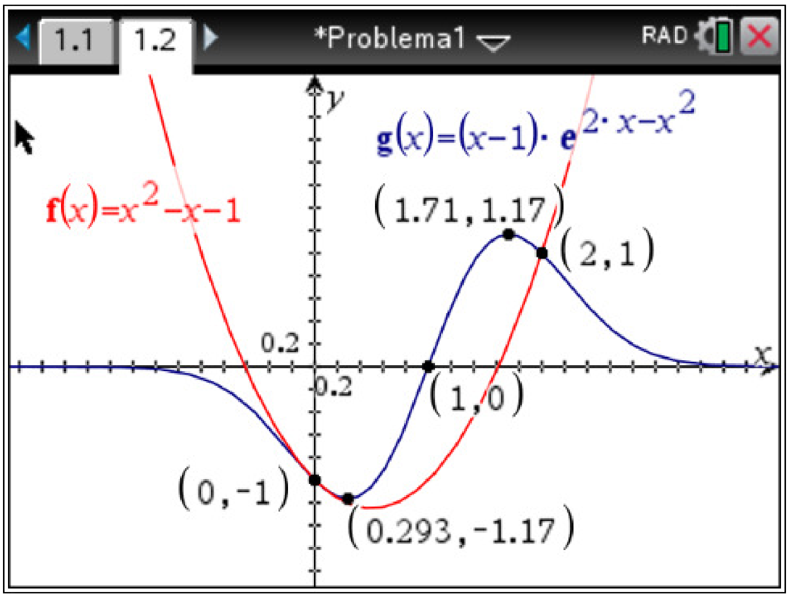
Sostituendo ed eseguendo i calcoli si ha:

$$y = g(x + 1) = (x + 1 - 1)e^{2(x+1) - (x+1)^2}$$

ovvero $y = x\, e^{1 - x^2}$, che è una funzione dispari.
Si ha $f'(x) = 2x - 1$ e $g'(x) = -e^{2x - x^2}(2x^2 - 4x + 1)$.
Entrambe le funzioni passano per il punto $B(0, -1)$ e inoltre $f'(0) = -1$ e $g'(0) = -1$.
Quindi le due funzioni hanno la stessa retta tangente nel punto $B(0, -1)$ e l'equazione della retta tangente è $y = -x - 1$.
La funzione $g(x) = (x - 1)e^{2x - x^2}$ ha quindi i punti estremanti in $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ la funzione ha un minimo relativo (che è anche assoluto) e per $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ha un massimo relativo (assoluto). Il minimo e il massimo valgono: $g\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{e}{2}} \approx \pm 1{,}17$.
Disegniamo il grafico di $g(x)$ con la calcolatrice grafica (TI-Nspire CX), che è in grado di determinare in modo numerico anche i massimi e i minimi.



Disegniamo nello stesso grafico anche la funzione $f(x)$. Il grafico è una parabola di vertice il punto $V\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$.



Per il calcolo dell'area della regione di piano compresa tra le due curve occorre calcolare il seguente integrale definito:

$$A=\int_0^2 (g(x)-f(x))\,dx$$

Si ottiene

$$A=\int_0^2 \left((x-1)e^{2x-x^2}-(x^2-x-1)\right)dx$$

$$A=\int_0^2 \left((x-1)e^{2x-x^2}\right)dx-\int_0^2 (x^2-x-1)\,dx$$

$$A=\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\,dx-\int_0^2 (x^2-x-1)\,dx$$

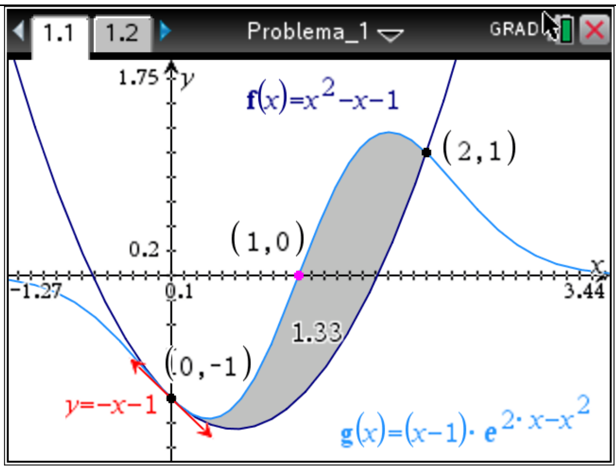
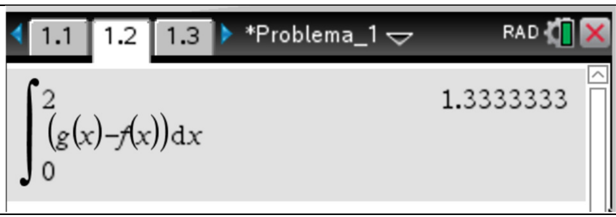
$$A=-\frac{1}{2}\int_0^2 2(1-x)e^{2x-x^2}\,dx-\int_0^2(x^2-x-1)\,dx$$
$$A=-\frac{1}{2}\left[e^{2x-x^2}\right]_0^2-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2$$
$$A=\left[x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}.$$

Il calcolo di questa area diventa più semplice traslando le curve di 1 verso sinistra. Si ottengono le funzioni: $y=x^2+x-1$ e $y=x\,e^{1-x^2}$. Si ha quindi

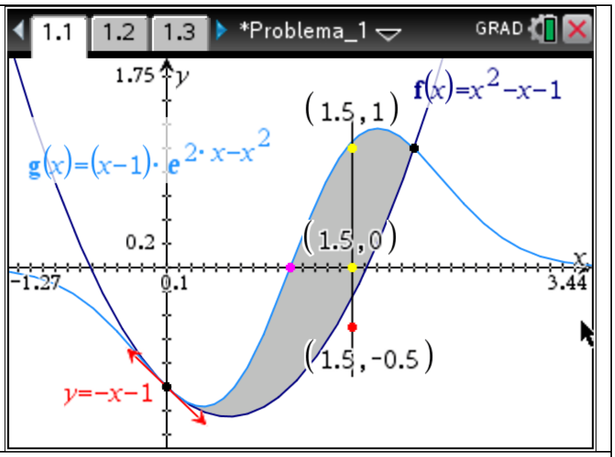
$$A=\int_{-1}^{1}\left(xe^{1-x^2}-(x^2+x-1)\right)dx=$$
$$A=\int_{-1}^{1}\left(xe^{1-x^2}\right)dx-\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)\,dx=$$
$$A=0-\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)\,dx=$$

(il primo integrale è applicato a una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine)

$$A=\left[x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

Visualizziamo i grafici delle due funzioni in una finestra grafica (della calcolatrice TI-Nspire CX) e verifichiamo tutte le caratteristiche chieste dal problema: 1) il grafico di $g(x)$ presenta una simmetria rispetto al punto (1,0) 2) i grafici di *f* e *g* ammettono una tangente in comune nel punto B, di equazione *y*=-*x*-1. 3) L'area delimitata dai due grafici tra i punti B(0,-1) e A(2,1) misura 4/3; la calcolatrice visualizza il valore approssimato 1.33.	
Il calcolo dell'integrale definito nella scheda di calcolo ci conferma il valore visualizzato in precedenza.	

Punto 3

Posizioniamo con “Geometria->Punti su” i tre punti del testo e verifichiamo che tra questi solo P_3 non cade all’interno del contorno di S.	
Applichiamo il teorema di Ampère sul contorno di S per valutare la circuitazione del campo magnetico. 1) La corrente i_3 non influisce sulla circuitazione essendo escluso dal cammino S; 2) Se i_2 <2 A la circuitazione è negativa e il campo magnetico ruota in senso orario rispetto al piano cartesiano. 3) Se i_2=2 A la circuitazione è nulla. 4) Se i_2 >2 A la circuitazione è positiva e il campo magnetico ruota in senso antiorario rispetto al piano cartesiano.	La circuitazione del campo magnetico calcolata lungo la linea chiusa $\mathcal{L}$ (in effetti linea chiusa è la spira), contorno della regione S, è data da: $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0\,(i_2 - i_1)$ $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0\,(i_2 - 2\text{ A})$

Punto 4

Calcoliamo l’espressione della corrente indotta nella spira ponendo $\alpha(t)=\omega t$ l’angolo che la direzione normale alla superficie S forma con il campo magnetico:	$i(t) = \frac{fem}{R} = -\frac{SB}{R}\frac{d(cos(\omega t))}{dt} = = \frac{SB\omega}{R} sin(\omega t)$
Identifichiamo il valore massimo della corrente indotta:	$i_{max} = \frac{SB\omega}{R}$
Ricaviamo ω:	$\omega = \frac{Ri_{max}}{SB} = \frac{(0{,}20\ \Omega)\cdot(5\cdot\ 10^{-3}\text{ A})}{(1{,}33\ \text{m}^2)\cdot(1{,}5\ \cdot 10^{-2}\text{ T})} = 0{,}05\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Commento sul problema 1

Il problema ha un livello di difficoltà medio/alta.

Si tratta di un problema che parte dalla Matematica (primi due punti) e poi arriva alla Fisica.

I temi trattati sono presenti sia nel QdR di Matematica che in quello di Fisica.

Per la risoluzione è di molto aiuto usare la calcolatrice grafica perché si possono tracciare immediatamente i vari grafici richiesti e osservarne le proprietà.
Occorreva comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti (perché le calcolatrici permesse sono non-CAS).