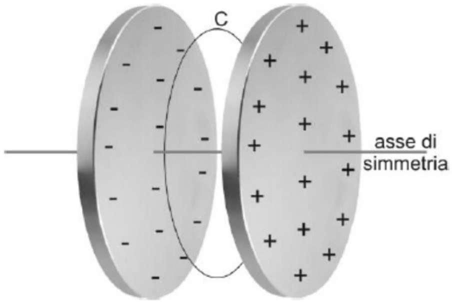
Esame di Stato 2019 – Liceo scientifico – 20 giugno 2019

Prova scritta di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di D. Falciai e L. Tomasi

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\, r \qquad \text{con } r \le R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

  Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.
  A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{b} f(t)\, dt$.

Soluzione
Punto 1

Il parametro *a* deve essere omogeneo all'istante di tempo *t*:	$[a] = [\mathrm{t}] = \mathrm{s}$
L'unità di misura di *k* si ottiene mediante formula inversa:	$[\mathrm{k}] = \left[\frac{\mathrm{B\,t^3}}{\mathrm{r\,t}}\right] = \frac{\mathrm{T\,s^2}}{\mathrm{m}}$
Il volume del condensatore è sede di una "corrente di spostamento" i_s prodotta dal campo elettrico variabile nel tempo. Il flusso del campo elettrico è calcolato su una superficie di contorno la circonferenza C (vedi figura del testo).	$i_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$
La corrente di spostamento, al pari di una corrente di conduzione, produce un campo magnetico indotto la cui circuitazione (calcolata sulla linea chiusa C) è data dalla legge di Ampère-Maxwell (IV equazione di Maxwell):	$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0\, i_s$
Le linee del campo elettrico all'interno del condensatore sono parallele, escono dall'armatura carica positivamente ed entrano nell'armatura con carica negativa; le linee del campo magnetico indotto sono circonferenze concentriche centrate sull'asse di simmetrica e giacenti su piani perpendicolari a questo. Campo elettrico e magnetico sono pertanto ortogonali tra di loro in ogni punto e in ogni istante.	

Punto 2

Data la geometria delle linee del campo magnetico indotto (sono delle circonferenze giacenti su piani paralleli alle armature del condensatore e aventi centro sull'asse di simmetria del condensatore), e considerando il modulo costante del campo magnetico lungo C, la circuitazione si ricava facilmente.	$\Gamma(\vec{B})=\oint_C B\,dl = B\oint dl = 2\pi r\, B(r)$
Utilizziamo la legge di Ampère-Maxwell (o IV equazione di Maxwell) tenendo conto che tra le armature del condensatore la corrente di conduzione *i* è nulla.	$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0(i + i_s)$ $\Gamma(\vec{B}) = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right)$
Utilizzando la legge di Ampère-Maxwell e la definizione della	

corrente di spostamento otteniamo l'equazione:	$$2\pi r\, B(r) = \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$
Risolviamo la precedente equazione rispetto alla derivata del flusso del campo elettrico:	$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{2\pi r\, B(r)}{\mu_0\, \varepsilon_0} = \frac{2\pi k t r^2}{\mu_0\, \varepsilon_0 \sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$
Calcoliamo l'integrale della funzione potenza con esponente frazionario, ottenendo esattamente la formula del flusso riportata nel testo.	$$\Phi(\vec{E}) = \int_0^t \frac{2\pi k t r^2}{\mu_0\, \varepsilon_0 \sqrt{(t^2+a^2)^3}} = \frac{-\pi k r^2}{\mu_0\, \varepsilon_0} \int_0^t \frac{-2t}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$
Per ottenere l'espressione del campo elettrico dividiamo il flusso per l'area del cerchio delimitato da C:	$$E = \frac{2k}{\mu_0\, \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$
Calcoliamo la d.d.p.:	$$\Delta V = -Ed = -\frac{2kd}{\mu_0\, \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$ ossia $$\Delta V = \frac{2kd}{\mu_0\, \varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right)$$
Calcoliamo il limite asintotico di $B(t)$ considerando la gerarchia degli infiniti:	$$\lim_{t\to+\infty} \lvert B(t)\rvert = 0$$
Il campo elettrico tende asintoticamente alla costante $\frac{2k}{\mu_0\, \varepsilon_0 a}$; questo comporta l'annullarsi della corrente di spostamento e quindi del campo magnetico da essa indotto.	

Punto 3

Per verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è una primitiva della funzione $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$ basta eseguire la derivata prima della funzione $F(t)$.

Si ottiene: $F'(t) = D\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2}(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$.

La funzione $F(t)$ è definita su $\mathbb{R}$, derivabile e quindi continua; è pari perché si ha $F(-t) = F(t)$.

Si ha inoltre $F(0) = 0$.

Si vede facilmente che:

$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}$.

Quindi la retta di equazione $y = -\frac{1}{a}$ è asintoto orizzontale del grafico della funzione.

Poiché conosciamo la derivata prima $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$ di $F(t)$, possiamo dire subito che la $F(t)$ ha un massimo relativo (e anche assoluto) per t=0. Il punto di massimo è l'origine O(0,0).

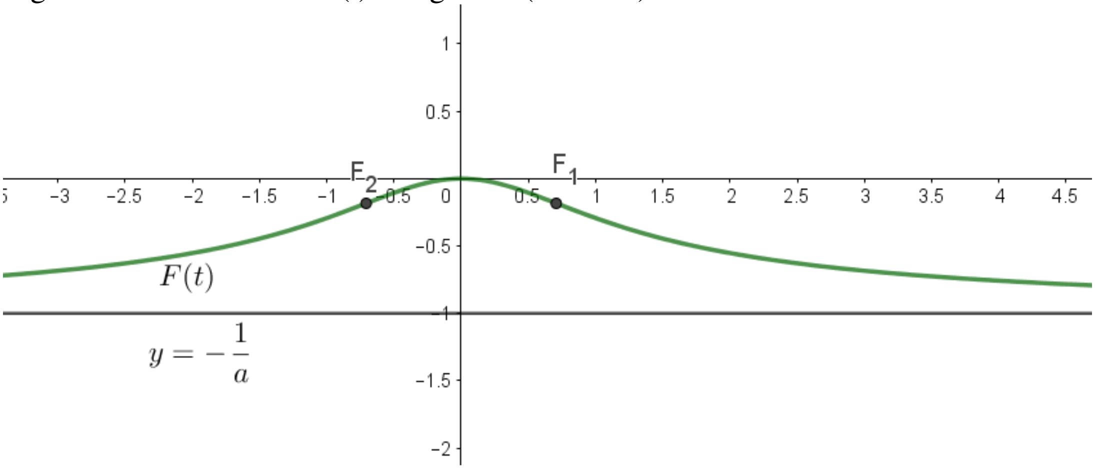
La derivata seconda di $F(t)$ è la derivata prima di $f(t)$. Si ha pertanto:

$F''(t) = f'(t) = D\left(-\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\right) = -(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} - t \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(t^2+a^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2t$=

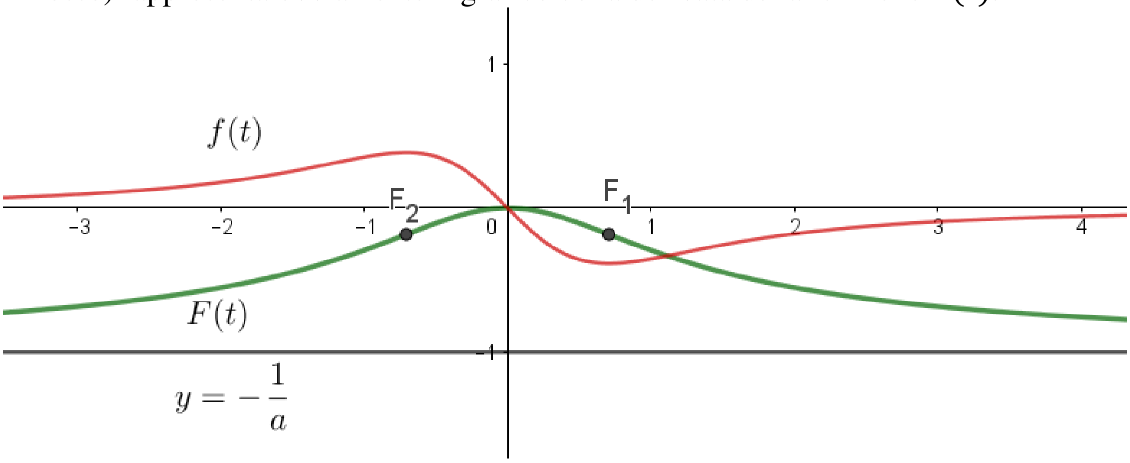
$= \frac{2t^2-a^2}{\sqrt{(t^2+a^2)^5}}$.
Studiando il segno della derivata seconda si trova la funzione $F(t)$ ha due flessi nei punti di ascissa $x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, simmetrici rispetto all'asse *y* (la funzione $F(t)$ è pari).
In tali punti il valore dell'ordinata è: $F\left(\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-3}{3a}$.
Le pendenze delle rette tangenti in tali punti saranno pertanto:

$$f\left(\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$

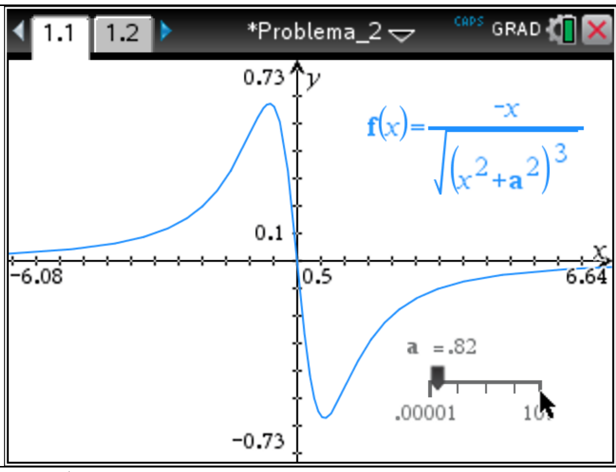
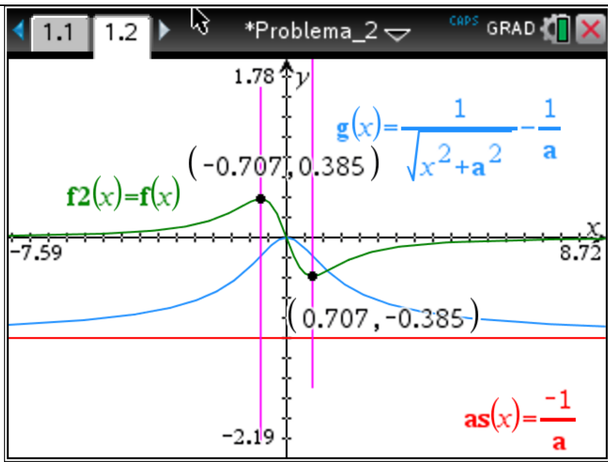
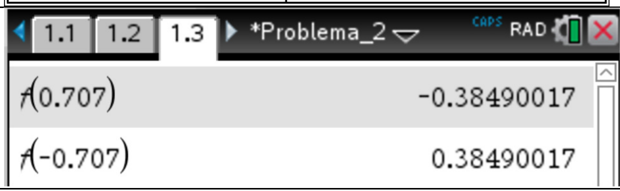
Il grafico della funzione *F*(*t*) il seguente (in verde):



Nella figura seguente è riportato anche il grafico di $f(t)$ oltre a quello di $F(t)$. Tale grafico (disegnato in rosso) rappresenta ovviamente il grafico della derivata della funzione $F(t)$.

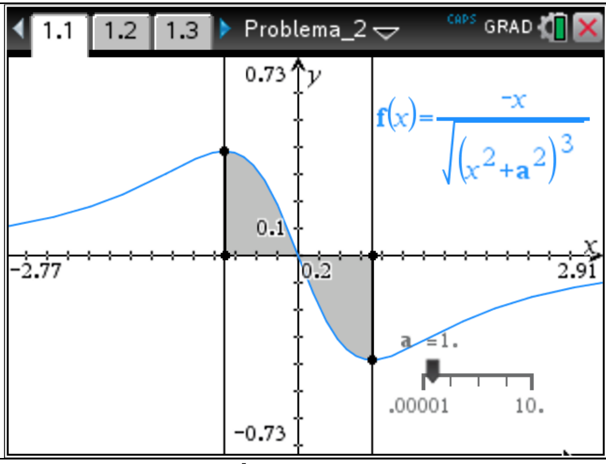


Per *x*<0, la $f(t)$ è positiva; quindi la funzione $F(t)$ è crescente;
Per *x*>0, la $f(t)$ è negativa; quindi la funzione $F(t)$ è crescente;
Per *x*=0, si ha $f(0) = 0$; quindi la funzione $F(t)$ ha un massimo relativo (e assoluto) nell'origine.
Le ascisse dei punti di flesso $x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$ della funzione $F(t)$ rappresentano rispettivamente le ascisse dei punti di massimo e di minimo della funzione $f(t)$.
Poiché la funzione $F(t)$ è pari, la sua derivata prima $f(t)$ è dispari. La derivata seconda di $F(t)$ è la derivata prima di $f(t)$ e sarà a sua volta pari.

<table>
<tr><td>Nella scheda grafica della calcolatrice (TI-Nspire CX) inseriamo un cursore a scorrimento (slider) per il parametro a>0 e otteniamo il grafico di $f(t)$, per t su tutto l'asse reale, al variare di a.
Si nota che la funzione è dispari (è la derivata di una funzione pari).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Calcoliamo le primitive di $f(t)$:</td><td>$$-\frac{1}{2}\int 2t(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} = (t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - cost$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ponendo la costante additiva uguale -1/a si seleziona la primitiva che si annulla in t=0.</td></tr>
<tr><td>Visualizziamo il grafico di $F(t)$ (nella figura $g(x)$ in blu), insieme al grafico di f(t), e individuiamo le caratteristiche: $F(t)$, funzione pari, negativa con un massimo nell'origine, presenta un asintoto orizzontale y = -1/a e due punti di flesso simmetrici in corrispondenza dei punti stazionari di f(t). Ponendo a=1 le ascisse dei flessi corrispondono ai valori
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0{,}707$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Calcoliamo i coefficienti angolari delle rette inflessionali, posto a=1:</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Calcoliamo le pendenze algebricamente:</td><td>$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \mp\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2+a^2\right)^3}} = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$</td></tr>
</table>

Punto 4

La funzione $f(t)$ è la derivata di $F(t)$; essendo $F(t)$ una funzione pari, $f(x)$ deve essere dispari; i punti di flesso di $F(t)$ si trovano in corrispondenza dei punti stazionari di $f(t)$.

Data la simmetria della funzione *f*(*t*) possiamo calcolare l'area come il doppio della regione di sinistra: $2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} f(t)dt = -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} 2t(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dt =$ $\left[\frac{2}{\sqrt{t^2+a^2}}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} = \frac{2}{a}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	
Essendo *f*(*t*) una funzione dispari, l'integrale definito calcolato su un intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo.	$\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0$

Commento sul problema 2

Il problema ha un livello di difficoltà alta, soprattutto per la parte iniziale di Fisica.
Questo problema, al contrario del primo, parte dalla Fisica per arrivare alla Matematica.
Bisogna aver capito bene l'equazione di Maxwell sul campo magnetico indotto da un campo elettrico variabile e la corrente di spostamento.
La parte di matematica contiene diversi calcoli, ma è più affrontabile.
Con la calcolatrice grafica si potevano fare velocemente tutti i grafici richiesti.