**Esempio di Prova di MATEMATICA E FISICA - MIUR - 28.02.2019**

**PROBLEMA 1 (traccia di soluzione di S. De Stefani)**

Assegnate due costanti reali $a$ e $b$ (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di $a$ e $b$, discutere se nel grafico della funzione $q$ è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di $a$ e $b$ in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate $(t, y)$, ha un massimo nel punto $B\left(2,\ \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione
$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$
verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4,\ \frac{16}{e^2}\right)$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $F$.

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo $t$ (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti $a$ e $b$ sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante $t$; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$.
Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\ \Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

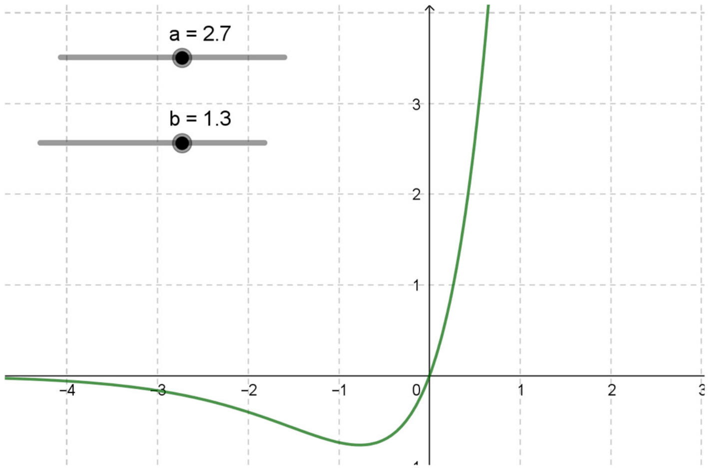
**Soluzione**

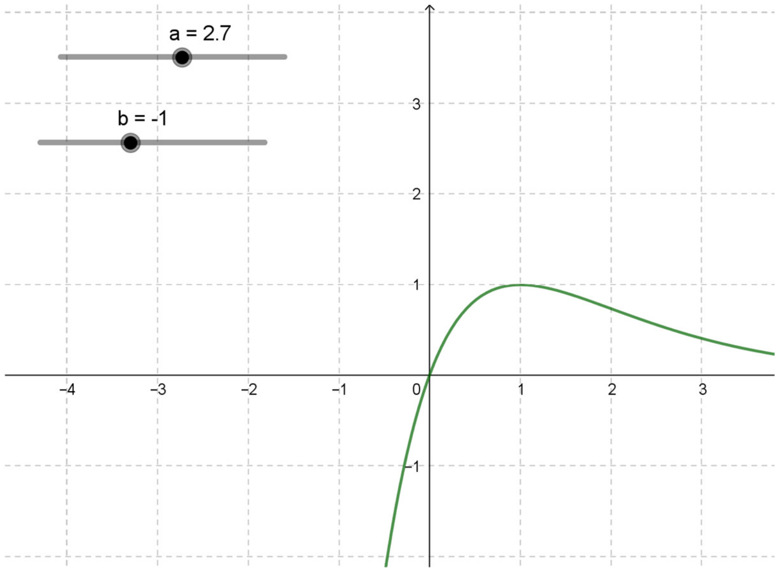
**Punto 1**

Poiché $a > 0$, possiamo esaminare due casi: $b > 0$ oppure $b < 0$.
La derivata prima della funzione $q(t) = a\,t\,e^{bt}$ è data da
$q'(t) = a\left(e^{bt} + bt\,e^{bt}\right) = ae^{bt}\left(1 + bt\right)$.

Quindi, se $b > 0$ la derivata prima $q'(t) = ae^{bt}\left(1 + bt\right)$ è positiva per $t \geq -\dfrac{1}{b}$ e la funzione $q(t)$ ha un minimo relativo (e assoluto) per $t = -\dfrac{1}{b}$.

Se $b < 0$ la funzione $q(t)$ ha un massimo relativo (e assoluto) per $t = -\frac{1}{b}$.




Imponiamo che il massimo della funzione sia il punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} q(2) = \frac{8}{e} \\ q'(2) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2a\,e^{2b} = \frac{8}{e} \\ a\,e^{2b}(1+2b) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i valori $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$.

**Punto 2**

La funzione $q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$ ha dominio $\mathbb{R}$, interseca gli assi in (0, 0) ed è positiva per $t > 0$. Poiché si ha $\lim_{t \to -\infty} q(t) = -\infty$, non esiste asintoto obliquo a sinistra.

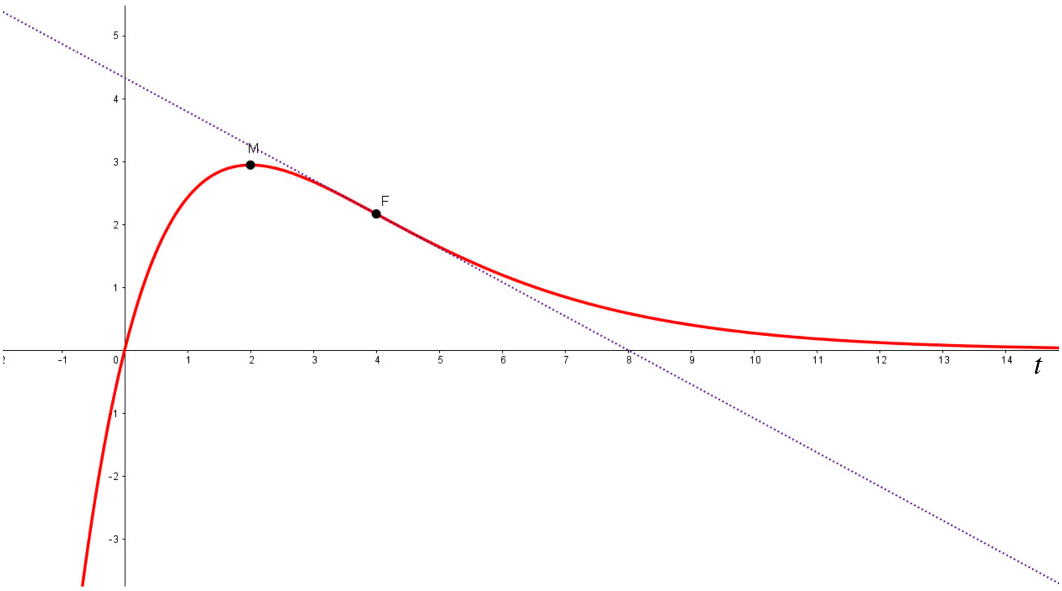
$$\lim_{t \to +\infty} q(t) = [\infty \cdot 0 \ \text{ F. I.}] = \lim_{t \to +\infty} \frac{4t}{e^{\frac{t}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \ \text{ F. I.}\right] =^{D.H.} \lim_{t \to +\infty} \frac{4}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow$$

L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale a destra.

$q'(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}(2 - t)$ la funzione cresce per $t < 2$, decresce per $t > 2$, ha un massimo in $M\left(2; \frac{8}{e}\right)$.

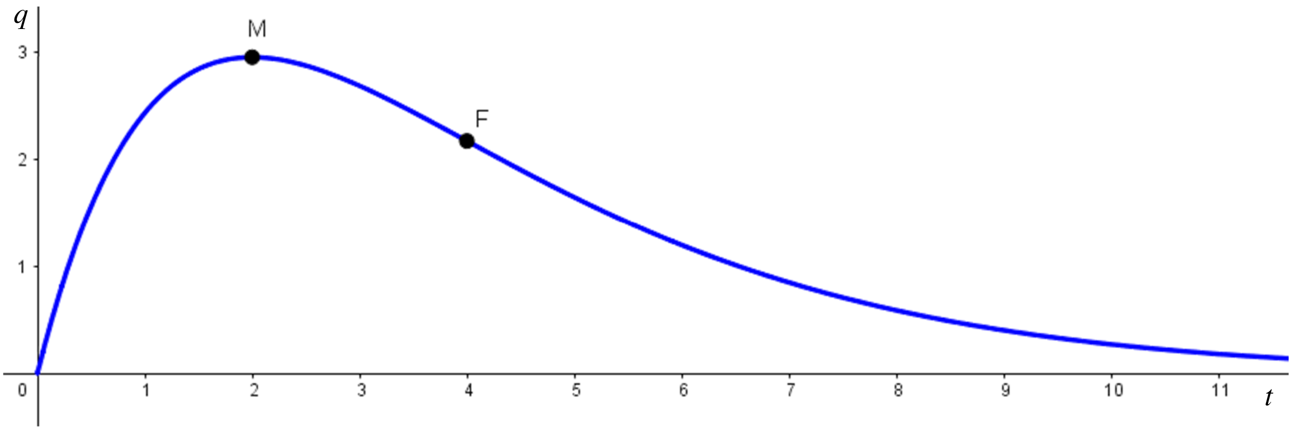
$q''(t) = e^{-\frac{t}{2}}(t - 4)$ la funzione è concava per $t < 4$, convessa per $t > 4$, ha un flesso in $F\left(4; \frac{16}{e^2}\right)$.

La retta tangente al grafico in $F$ ha equazione $y - \frac{16}{e^2} = \frac{-4}{e^2} \cdot (t - 4)$.




**Punto 3**

La costante $a$ , se $q$ è una carica, ha la dimensione fisica di una intensità di corrente $[a] = [i]$, e si misura in ampere (A), essendo il rapporto tra una carica e un tempo.
La costante $b$ ha invece le dimensioni fisiche del reciproco di un tempo: $[b] = [t^{-1}]$ e si misura quindi in $s^{-1}$.
Nel testo, la definizione, come grandezza fisica, della funzione $q(t)$ non è chiara…. Assumiamo che $q(t)$ sia una carica e che $dq$ sia la carica elettrica infinitesima che fluisce attraverso la sezione di un conduttore nell'intervallo di tempo infinitesimo $dt$. Si ha quindi $\frac{dq}{dt} = i(t)$. Pertanto $q(t) = \int_0^t i(t)\,dt$ e quindi è la quantità di carica che ha attraversato una sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $[0, t]$. La derivata di $q(t)$ è pertanto l'intensità di corrente istantanea. Il grafico di $q(t)$ è il seguente.




L'intensità di corrente all'istante $t$ corrisponde alla derivata prima della funzione, già calcolata in precedenza: $i(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}(2-t)$ con $t \geq 0$.

Essendo $i'(t) = e^{-\frac{t}{2}}(t-4)$, la funzione decresce per $t < 4$ e cresce per $t > 4$, quindi presenta un minimo in $N\left(4; \frac{-4}{e^2}\right)$.

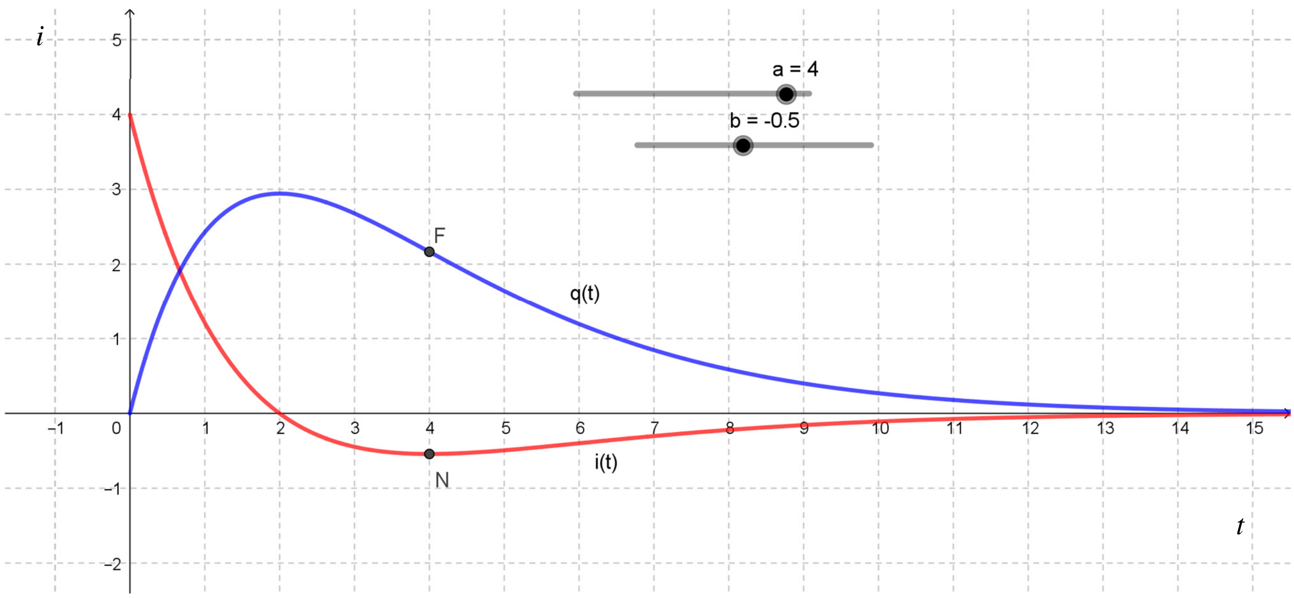
La corrente ha valore massimo nell'istante iniziale ($t = 0$ s) ed è pari a 4 A.

Il valore minimo assunto dalla corrente, nell'istante di tempo $t = 4$ s, vale circa -0,54 A. Si noti che dopo 2 s la corrente si inverte.

Si ha inoltre:

$$\lim_{t\to+\infty} 2e^{-\frac{t}{2}}(2-t) = [\infty \cdot 0\,] = \lim_{t\to+\infty} \frac{4-2t}{e^{\frac{t}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ forma indet.}\right] =^{H.} \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-2}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}}\right) = 0.$$

Quando il tempo tende all'infinito, l'intensità di corrente tende a zero.



**Punto 4**

La definizione di $Q(t_0)$ nel testo è ambigua e poco chiara e non si comprende esattamente quale sia la prima richiesta di questo punto 4. Probabilmente si chiede di trovare il seguente integrale:

$Q_0 = \int_0^{t_0} i(t)\,dt = \int_0^{t_0} q'(t)\,dt = [q(t)]_0^{t_0} = 4t_0\, e^{-\frac{t_0}{2}}$ (misurata in coulomb).

Si ha

$$\lim_{t_0\to+\infty} Q_0 = \int_0^{+\infty} i(t)\,dt = \lim_{t_0\to+\infty}\left(4t_0\, e^{-\frac{t_0}{2}}\right) = 4\lim_{t_0\to+\infty}\left(\frac{t_0}{e^{-\frac{t_0}{2}}}\right) \overset{H.}{=} 4\lim_{t_0\to+\infty}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{t_0}{2}}}\right) = 0.$$

L'energia dissipata per effetto Joule nel circuito, nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$, è data da

$$W = \int_0^{t_0} Ri^2\,dt = \int_0^{t_0} R\left(q'(t)\right)^2 dt = 3\int_0^{t_0}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(2-t)\right)^2 dt = 12\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-t}(2-t)^2\,dt$$

che lasciamo indicato (come richiesto dal testo).

**Giudizio sul problema**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Livello di difficoltà stimato** | ☐ Basso | ☐ Medio | ☒ Alto | ☐ Molto alto | |
| **Formulazione del problema** | ☒ Scorretta | ☐ Ambigua | ☐ Poco chiara | ☐ Corretta | ☐ Molto chiara |
| **Si tratta di un problema contestualizzato** | ☐ No | ☐ Parzialmente | ☒ In modo accettabile | ☐ Ben contestualizzato | |
| **L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali** | ☒ Sì | | ☐ No | ☐ Non è esplicitato / Non è chiaro | |
| **L'argomento è presente nel QdR di Matematica** | ☒ Sì | | ☐ No | ☐ Non è esplicitato / Non è chiaro | |
| **L'argomento è presente nel QdR di Fisica** | ☒ Sì | | ☐ No | ☐ Non è esplicitato / Non è chiaro | |
| **Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?** | ☒ Sì | | ☐ No | ☐ Non sempre | |
| **È un argomento presente nei libri di testo di Mat/Fis?** | ☐ No | | ☐ Non sempre | ☒ Sempre | |
| **Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?** | ☒ Sì | | ☐ Solo parzialmente | ☐ No | |
| **Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?** | ☒ Sì | | ☐ No | ☐ Parzialmente | |