

Esempio di Prova di MATEMATICA E FISICA - MIUR - 28.02.2019

PROBLEMA 2 (traccia di soluzione di L. Rossi)

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta r di equazione $y = 1$.

1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0, 1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.
2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x , l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da

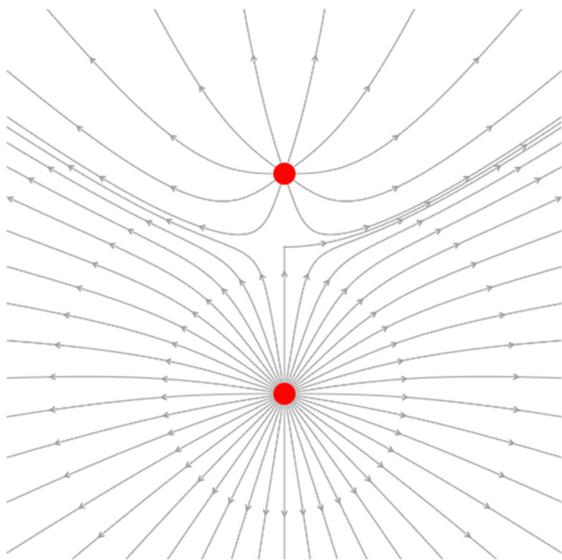
$$U(x) = k \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

dove k è una costante positiva (unità di misura: $N \cdot m^2/C^2$).

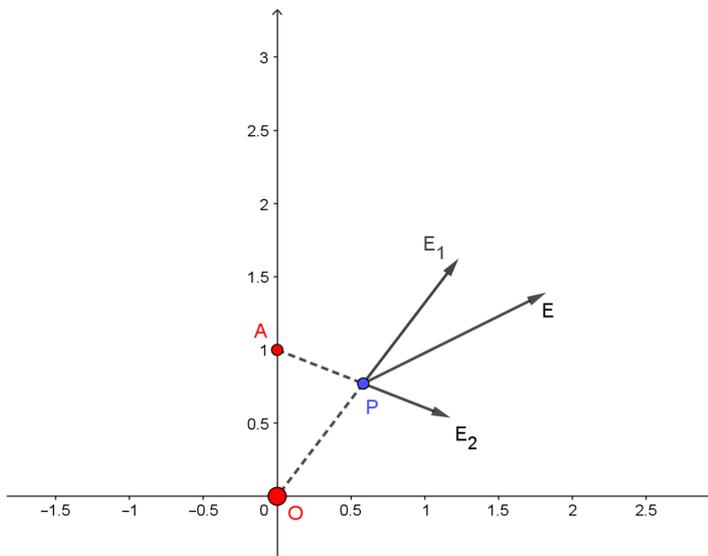
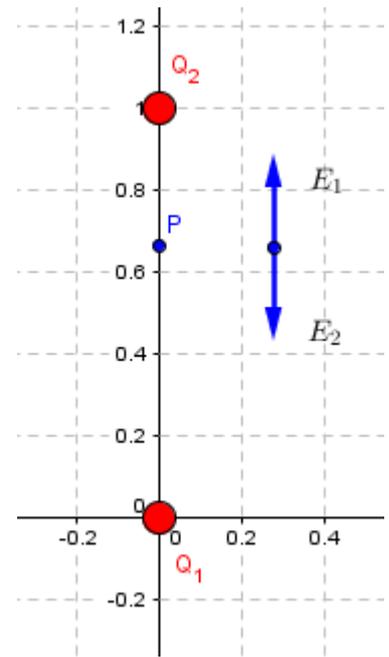
3. Studiare la funzione $U(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?
 4. A partire dal grafico della funzione U , tracciare il grafico della funzione U' , specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^m U'(x) dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di U').
-

Soluzione

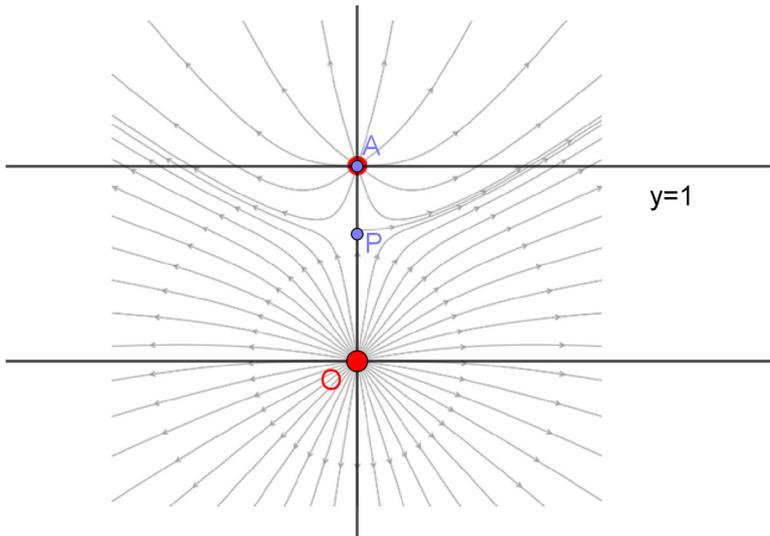
Punto 1



Linee del campo elettrico $Q_1=4q$ e $Q_2=q$ nel piano Oxy .
 Il campo elettrico in un punto P può essere rappresentato nel seguente modo:



Se Q_2 è nel punto $A(0,1)$, il campo elettrico è simmetrico rispetto all'asse y (passante per le due cariche). Quindi il campo, nello spazio, ha una simmetria cilindrica rispetto all'asse y .
 Nel piano Oxy le linee del campo elettrostatico sono indicate in modo approssimato nella seguente figura.



Il campo sarà nullo in un punto sull'asse y che giace tra le due cariche. Sia $P(0, y)$ tale punto. In P i campi elettrici generati da Q_1 e da Q_2 devono essere opposti. Pertanto:

$$k \frac{4q}{y^2} = k \frac{q}{(1-y)^2}.$$

Si ottiene:

$$4(1-y)^2 = y^2.$$

Si ricava $2|1-y| = |y|$.

L'unica soluzione accettabile è data da $2(1-y) = y$, che fornisce $y = \frac{2}{3}$.

Una carica Q posta nel punto $P(0, 2/3)$ si trova in un punto di equilibrio instabile.

Se una terza carica positiva Q , posta nel punto P , viene allontanata di pochissimo dal punto P , tende ad allontanarsi ancora di più. La carica nel punto P ha un massimo di energia potenziale e quindi tende a spostarsi in punti di minor energia potenziale.

Una terza carica Q negativa, posta in P si troverebbe anch'essa in equilibrio elettrostatico instabile.

Se Q viene allontanata di pochissimo dal punto P , nella direzione dell'asse y , tende a muoversi verso la carica più vicina e non tornerebbe nel punto P .

Punto 2

Se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x , l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da:

$$U(x) = k \frac{Q_1 Q_2}{d} = k \frac{Q_1 Q_2}{\sqrt{1+x^2}} = k \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

dove k è una costante positiva (unità di misura: $N \cdot m^2/C^2$ deducibile dalla Legge di Coulomb).

Punto 3

La funzione:

$$U(x) = k \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ha come dominio \mathbb{R} .

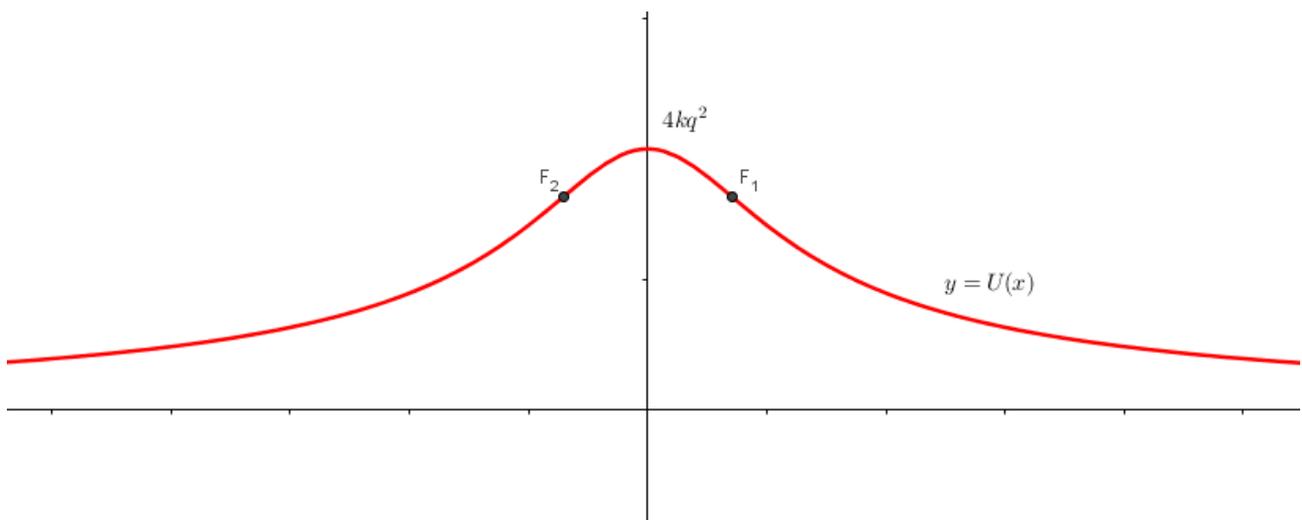
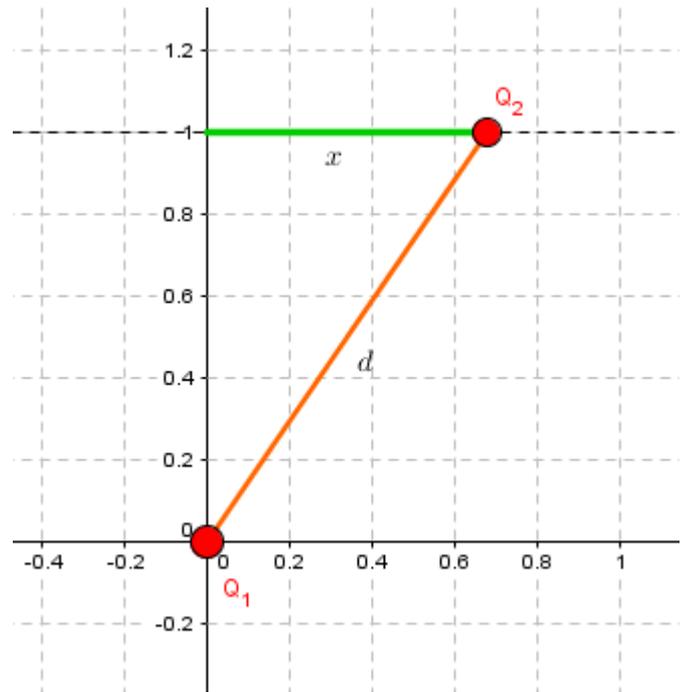
E' continua, sempre positiva e pari ($U(x) = U(-x) \forall x \in \mathbb{R}$); interseca l'asse y in $(0, 4kq^2)$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$ quindi possiede asintoto orizzontale l'asse x .

Dallo studio della derivata prima: $U'(x) = -4kq^2 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ si ottiene un massimo assoluto in $x = 0$.

Dallo studio della derivata seconda: $U''(x) = 4kq^2 \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$ si ottengono due punti di flesso in $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

I coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso sono: $U'\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mp \frac{8}{9}\sqrt{3}kq^2$



Punto 4

Essendo la funzione $U(x)$ pari, la sua derivata $U'(x)$ sarà una funzione dispari.

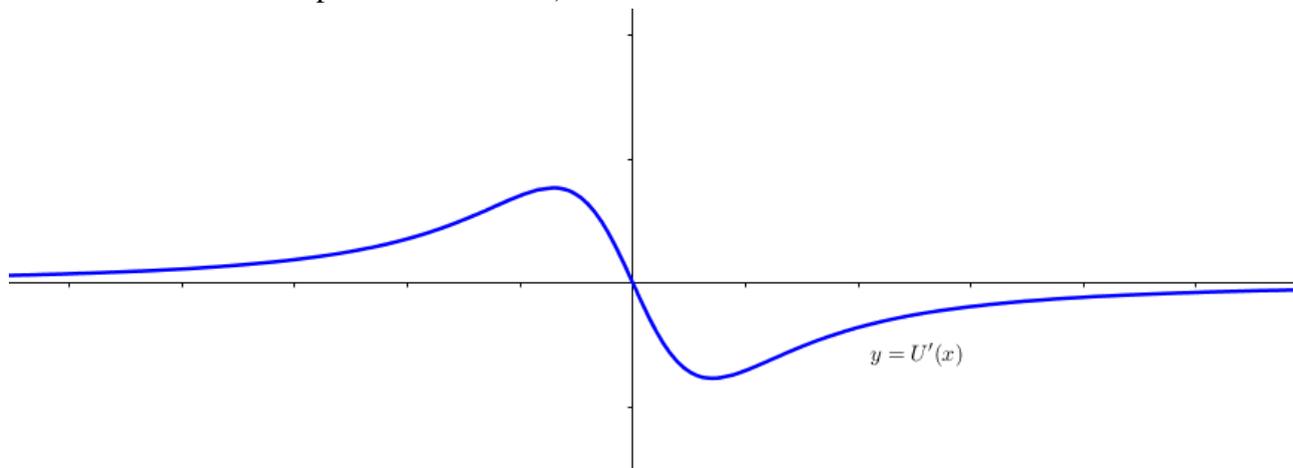
La funzione $U(x)$ è ovunque derivabile, la sua derivata $U'(x)$ sarà una funzione continua in \mathbb{R} .

Nei punti stazionari di $\mathcal{U}(x)$ la derivata è nulla ($x = 0$); negli intervalli in cui la funzione è crescente la derivata prima è positiva ($x < 0$); negli intervalli in cui la funzione è decrescente la derivata prima è negativa ($x > 0$).

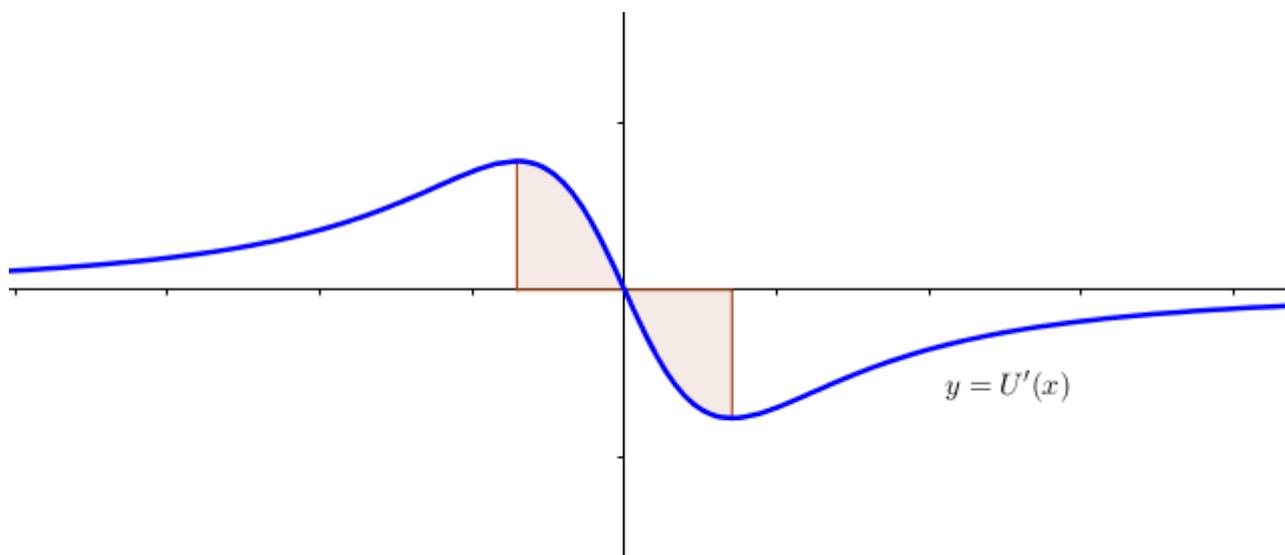
I punti di flesso della funzione sono estremanti della derivata prima.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{U}'(x) = 0.$$

Mettendo insieme tutte queste informazioni deduciamo il grafico di $\mathcal{U}'(x)$ (che trova conferma anche dallo studio della sua espressione analitica).



$\int_{-m}^m \mathcal{U}'(x) dx = 0$ poiché come osservato in precedenza la funzione $\mathcal{U}'(x)$ è dispari dunque pensando al significato geometrico di integrale definito $\int_{-m}^0 \mathcal{U}'(x) dx = -\int_0^m \mathcal{U}'(x) dx$:



Il valore dell'integrale richiesto sarebbe stato comunque 0 indipendentemente dal valore di m .

Giudizio sul problema

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara

Si tratta di un problema contestualizzato	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente	<input type="checkbox"/> In modo accettabile	<input checked="" type="checkbox"/> Ben contestualizzato
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Fisica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Mat/Fis?	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No		<input checked="" type="checkbox"/> Parzialmente