Esempio di Prova di MATEMATICA E FISICA - MIUR - 28.02.2019

QUESITO 1 (traccia di soluzione di S. De Stefani)

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a\,x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

Soluzione

La funzione deve essere continua nel punto $x = 1$. Quindi i limiti $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ devono esistere, finiti ed essere uguali.

Si ha quindi:

$$\lim_{x \to 1^-} (3 - ax^2) = \lim_{x \to 1^+} \frac{b}{x-3}.$$

Si ottiene $3 - a = -\dfrac{b}{2}$ e quindi troviamo $b = 2a - 6$.

La funzione deve essere derivabile nel punto $x = 1$.

La funzione è derivabile a sinistra in $x = 1$ e si ha $f'_-(1) = -2a$

Calcoliamo il seguente limite, che rappresenta il rapporto incrementale destro nel punto $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}.$$

Tale limite deve esistere, finito e uguale alla derivata sinistra nel punto $x = 1$.

Si ha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\dfrac{b}{h-2} + \dfrac{b}{2}}{h} = b \cdot \lim_{h \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{h-2} + \dfrac{1}{2}}{h} = b \cdot \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2(h-2)} = -\frac{b}{4}.$$

Quindi si ricava: $-2a = -\dfrac{b}{4} \rightarrow b = 8a$

In definitiva si ha $a = -1$ e $b = -8$.

Quindi si ottiene la seguente funzione:

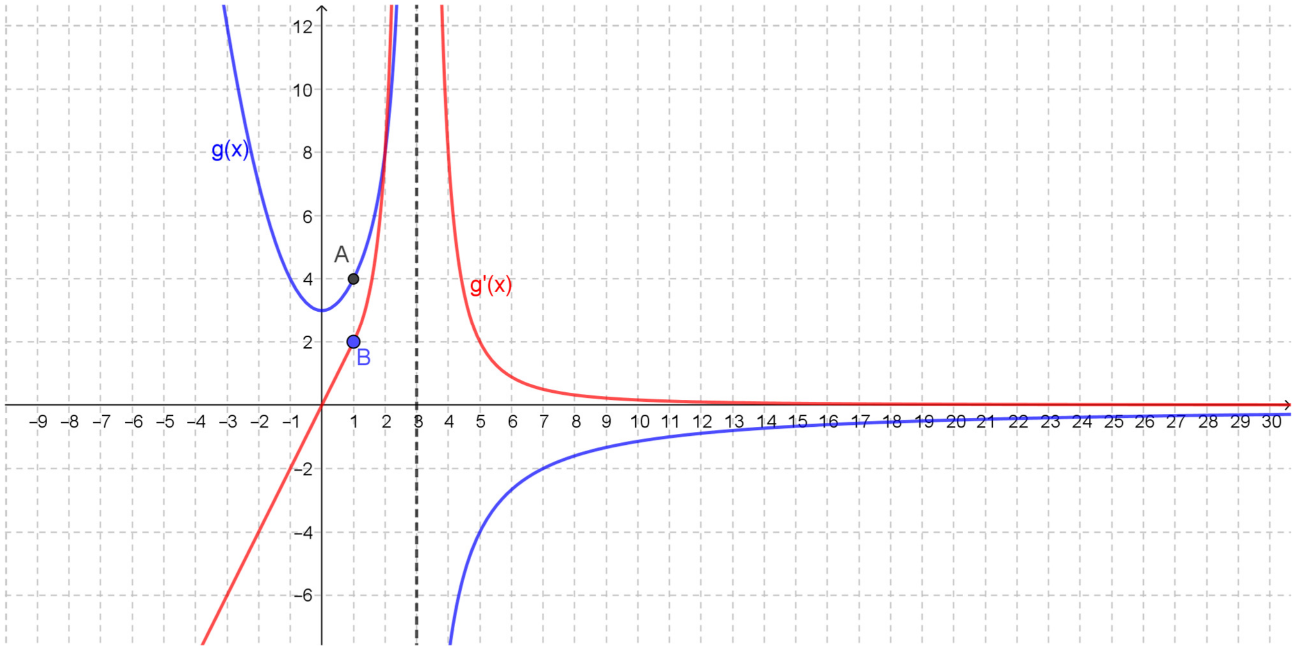
$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ -\dfrac{8}{x-3} & \text{per } 1 < x < 3 \vee x > 3 \end{cases}$$

Quindi la derivata prima è:

$$g'(x)=\begin{cases} 2x & \text{per } x \le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & \text{per } 1 < x < 3 \vee x > 3 \end{cases}$$

La funzione ha un minimo relativo per $x = 0$ dove vale 3. Ha come asintoto orizzontale l'asse delle e come asintoto verticale la retta di equazione $x = 3$. Il grafico è formato dall'unione di un arco di parabola e da due archi di iperbole equilatera.

Il grafico della funzione $g(x)$ e della sua derivata prima sono riportati qui di seguito.



Giudizio sul quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Mat/Fis?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	☐ Sì	☐ No	☒ Parzialmente		