Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

QUESITO 4 (traccia di soluzione di S. De Stefani)

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:
   - incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
   - abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
   - passi per il punto $P(7, 10)$.

   Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

Soluzione

Una funzione razionale che soddisfa alle ipotesi deve avere il fattore $(x+1)$ almeno con molteplicità 1 e il fattore $(x-2)$ almeno con molteplicità 2 del polinomio $s(x)$ al numeratore. Analogamente, il polinomio $t(x)$ al denominatore deve contenere il fattore $(x-1)$ e il fattore $(x+3)$ ciascuno almeno con molteplicità 1. La funzione razionale più semplice che soddisfa queste richieste è la seguente:

$f(x) = \dfrac{a(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$ dove a è una costante reale.

Imponendo il passaggio per il punto (7, 10), si ottiene: $f(7) = 10$.

Si ha quindi $\dfrac{a \cdot 8 \cdot 5^2}{6 \cdot 10} = 10$, da cui si ricava $a = 3$. <u>Una</u> funzione quindi, che soddisfa alle ipotesi, è la seguente: $f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$.

Questa funzione ha un minimo relativo nel punto (2;0).

Eseguendo la divisione tra il numeratore e il denominatore, si trova:

$$\frac{3\left(x^3 - 3x^2 + 4\right)}{x^2 + 2x - 3} = 3\left(x - 5 + \frac{13x - 11}{x^2 + 2x - 3}\right).$$

Quindi la funzione ha per asintoto obliquo la retta di equazione: $y = 3(x-5)$.

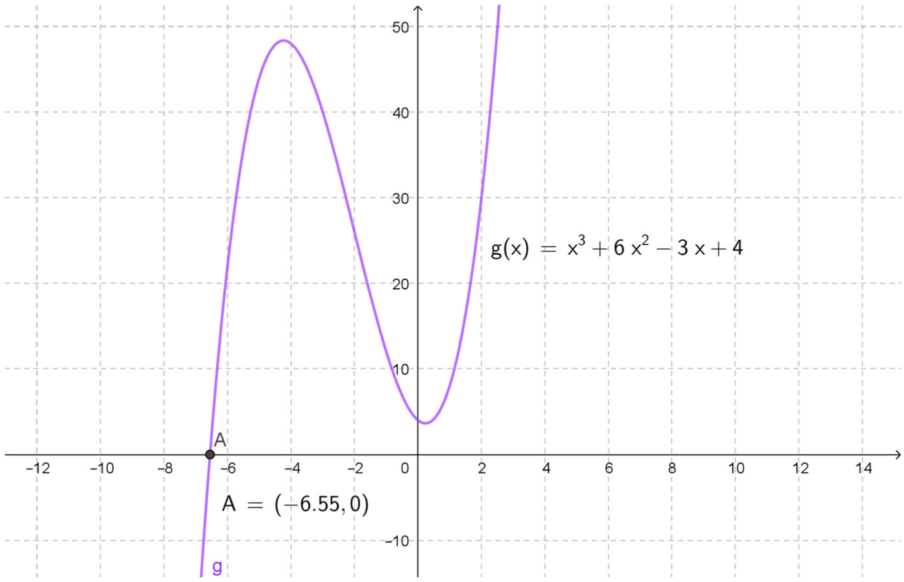
La derivata prima è:

$$f'(x) = 3\frac{(x-2)\left(x^3 + 6x^2 - 3x + 4\right)}{(x-1)^2(x+3)^2}$$

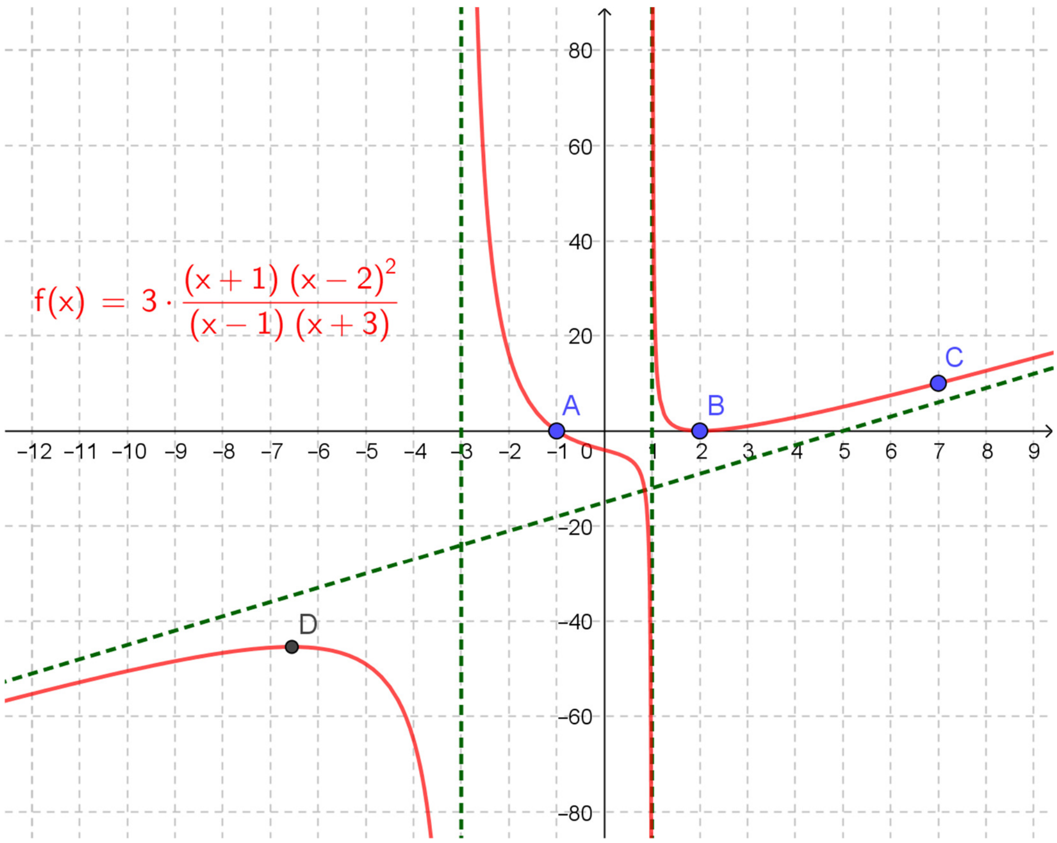
La derivata prima si annulla per $x = 2$ (punto di minimo relativo) e in $x = -6{,}55...$ (punto di massimo relativo).

Per trovare lo zero approssimato $x = -6{,}55...$ occorre studiare la funzione $g(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 4$.

È una cubica che ha un solo zero reale. Il grafico della funzione $g(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 4$ è riportato qui di seguito:



Il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$ è il seguente:



Giudizio sul quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐Molto chiara

L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Mat/Fis?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☒ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente