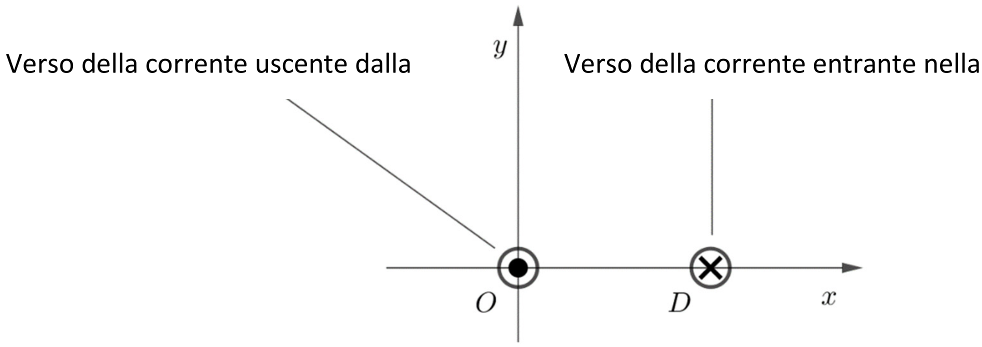
Simulazione di prova scritta di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 2.4.2019

PROBLEMA 1 (soluzione a cura di S. De Stefani)

Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con i l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale *Oxy*, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine O e l'altro per il punto $D(1, 0)$, come mostrato in figura.



1. Verificare che l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$, espresso in tesla (T), in un punto $P(x, 0)$, con
   $0 < x < 1$, è data dalla funzione $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, dove K è una costante positiva della quale si richiede l'unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore $\vec{B}$ al variare di x nell'intervallo $(0, 1)$. Per quale valore di x l'intensità di $\vec{B}$ è minima?

2. Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme q transita, ad un certo istante, per il punto $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni.

   Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell'asse x esterni al segmento OD. Esistono punti sull'asse x dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?

3. Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra r e il grafico di f.

4. Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\, dx$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t \geq 2$, l'integrale

$$g(t) = \int_{2}^{t} |f(x)|\, dx$$

e calcolare $\lim_{t \to +\infty} g(t)$. Qual è il significato di tale limite?

Soluzione

Punto 1

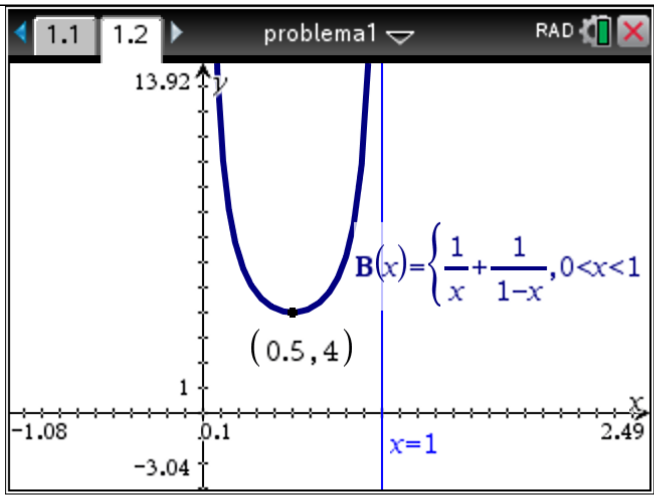
Nel punto *P*, per la legge di Biot-Savart, il modulo del campo magnetico è dato dalla somma dei contributi dei moduli dei campi magnetici (entrambi paralleli all'asse *y* e orientati nel verso positivo dell'asse *y*) generati dai due fili: $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$.

L'unità di misura di *K* è $\mathrm{T} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}$.

Il grafico di $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ è quello a fianco (dove è stato posto *K*=1).
Per simmetria il minimo deve essere nel punto $x = ½$.
Se si deriva la funzione si ottiene lo stesso risultato. La derivata prima della funzione è:

$$B'(x) = K\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}.$$

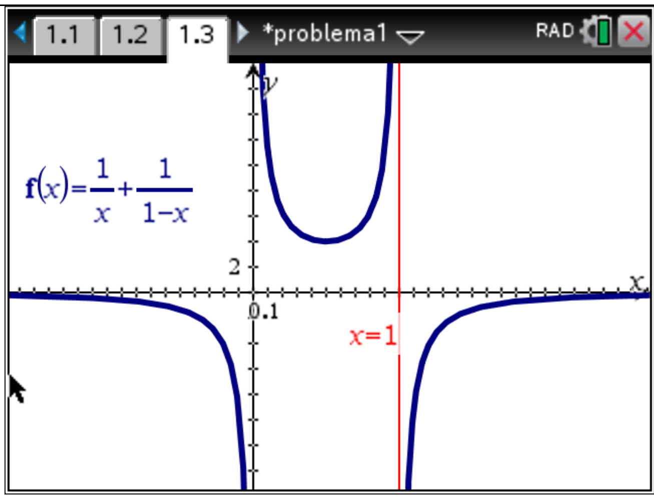
La derivata si annulla in $x = \frac{1}{2}$, che è un punto di minimo (perché la derivata prima ha lo stesso segno del numeratore).



Punto 2

La forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v}_0 \times \vec{B}$, agente sulla carica in moto è nulla, essendo il vettore velocità parallelo al vettore campo magnetico; quindi il moto della particella carica è rettilineo e uniforme.

Nei punti dell'asse *x* esterni al segmento *OD* il campo magnetico, parallelo all'asse *y* e orientato nel verso negativo di *y*, è dato dalla differenza dei moduli dei campi magnetici, di verso opposto, generati dai due fili; ha modulo (e segno) dati dalla funzione $B(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, la stessa espressione che è valida per $0 < x < 1$. Non esistono punti sull'asse x in cui il campo si annulla.

Il campo magnetico ha verso contrario all'asse y per $x < 0$ o per $x > 1$ e lo stesso verso dell'asse y per $0 < x < 1$. Il grafico dell'intensità del campo magnetico (con il segno) è riportato qui a fianco, dove è stato posto $K = 1$.	

Punto 3

La funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, di dominio $\mathbb{R} - \{0{,}1\}$, non interseca gli assi cartesiani, presenta due asintoti verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ ed ha l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale.

La derivata prima è $f'(x) = K\frac{2x-1}{(x-x^2)^2}$; quindi la funzione $f(x)$ presenta un punto stazionario in $\left(\frac{1}{2}, 4K\right)$.

La derivata seconda è: $f''(x) = 2K \cdot \frac{3x^2-3x+1}{x-x^2}$; quindi la funzione $f(x)$ non presenta punti di flesso.

Un possibile grafico della funzione, ottenuto ponendo $K = 1$, è riportato nel seguito.

La retta r tangente alla curva in $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{2}K\right)$ ha pendenza $m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{27}{4}K$, ed equazione:

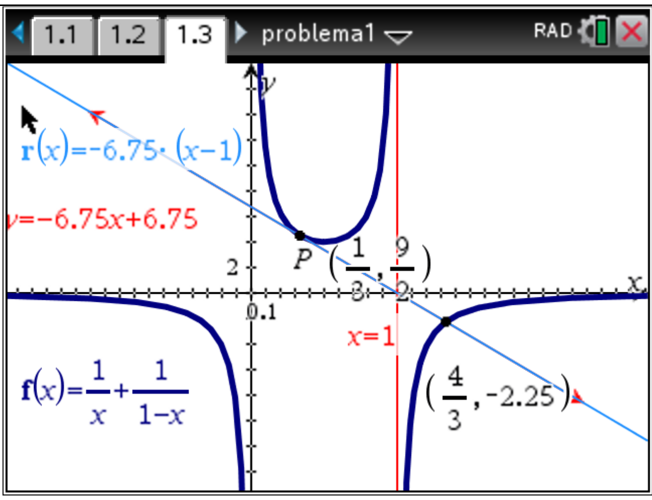
$y = \frac{27}{4}K(1-x)$.

Tale retta interseca la funzione in $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{2}K\right)$ (intersezione doppia) e in $\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}K\right)$.

La funzione ha due asintoti verticali le rette di equazioni: $x=0$ e $x=1$.
È strettamente decrescente e concava per $x<0$ (dove è negativa); strettamente decrescente e convessa da 0 a 1/2; strettamente crescente e convessa per ½< x < 1 (positiva nell'intervallo aperto (0, 1)); strettamente crescente e concava per $x>1$ (e qui negativa).
Il punto P ha coordinate (1/3;9/2).

La tangente in $P\left(\frac{1}{3};\frac{9}{2}\right)$ ha equazione

$y-\frac{9}{2}=-\frac{27}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)$ ovvero, $y=-\frac{27}{4}(x-1)$.



L'ulteriore punto di intersezione Q tra la tangente t e la curva si trova dal seguente sistema:

$$\begin{cases} y=-\frac{27}{4}(x-1) \\ y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1} \end{cases}$$

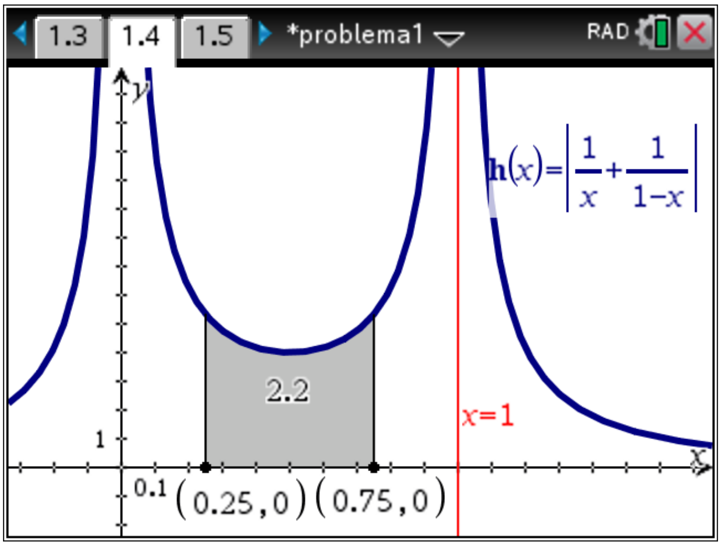
$$\begin{cases} 27x(x-1)^2=4 \\ y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-4)(3x-1)^2=0 \\ y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1} \end{cases}$$

Si ottiene Q(4/3;-9/4).

Punto 4

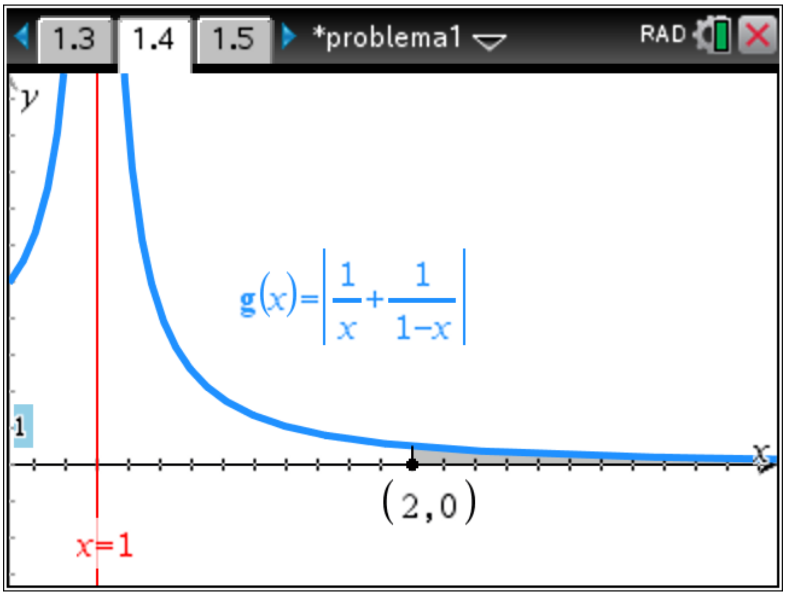
L'integrale $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = K\cdot[ln|x|-ln|1-x|]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 2Kln3$ rappresenta l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rette verticali $x=\frac{1}{4}$ e $x=\frac{3}{4}$. Nel seguente grafico abbiamo rappresentato l'area ponendo K=1.



Per $x \geq 2$, essendo la funzione negativa, si ha:

$$g(t) = \int_{2}^{t} K\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = K \cdot [ln|x-1| - ln|x|]_2^t = K \cdot \left(ln\left(\frac{t-1}{t}\right) + ln2\right)$$

Il limite $\lim_{t\to+\infty}\left[K\, ln\left(2\left(\frac{t-1}{t}\right)\right)\right] = K\, ln2$ rappresenta il limite a cui tende l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, dalla retta $x = 2$ e dall'asse delle ascisse per i valori di $x \geq 2$.



Commento sul problema 1

Il problema ha un livello di difficoltà alto.

Il testo contiene alcune imprecisioni (per es., filo "indefinito", cosa significa?).

Si tratta di un problema che parte dalla Fisica (primi due punti) e poi arriva alla Matematica.

È quindi parzialmente contestualizzato. I temi trattati sono presenti sia nel QdR di Matematica che in quello di Fisica.

Per la risoluzione è di molto aiuto usare la calcolatrice grafica perché si possono tracciare immediatamente i vari grafici richiesti e osservarne le proprietà. Occorre comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti (perché le calcolatrici permesse non sono CAS).