Simulazione di prova scritta di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 2.4.2019

PROBLEMA 2 (soluzione a cura di L. Rossi)

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(k - x) \qquad\qquad g(x) = x^2(x - k).$$

1. Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0, k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $F(x_F\,, y_F)$ ed il grafico di g ha un unico punto di minimo $G(x_G\,, y_G)$. Verificare che si ha $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.

2. Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, per $x \in [0, 1]$, rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.

3. Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ T, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}$ Wb.

4. Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a $70\,\Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0$ s, inizi a variare secondo la legge:

   $$B(t) = B_0\, e^{-\omega t} \cos(\omega t), \text{ con } \omega = \pi \text{ rad/s}$$

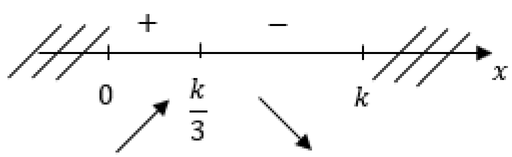
   e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.
   Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

Soluzione

Punto 1

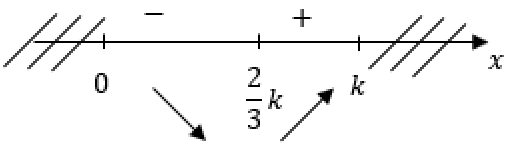
Studiamo il segno della derivata prima delle due funzioni nell'intervallo $[0, k]$ con $k > 0$.

$f'(x) = \frac{k-3x}{2\sqrt{x}}$ e risulta:



dunque $F\left(\frac{k}{3}, \frac{2}{9}k\sqrt{3k}\right)$ è punto di massimo per $y = f(x)$ in $[0, k]$.

$g'(x) = 3x^2 - 2kx$ e risulta:



dunque $G\left(\frac{2}{3}k, -\frac{4}{27}k^3\right)$ è punto di minimo per $y = g(x)$ in $[0, k]$.

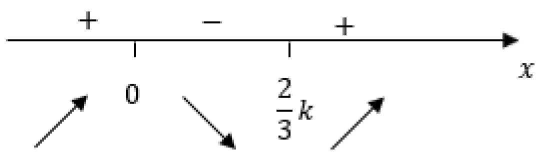
Risulta:

$x_G = \frac{2}{3}k = 2\frac{k}{3} = 2x_F$ e $y_G = -\frac{4}{27}k^3 = -\left(\frac{2}{9}k\sqrt{3k}\right)^2 = -(y_F)^2$.

Punto 2

La funzione $y = f(x) = \sqrt{x}(k - x)$ non è derivabile in $x = 0$ perché si ha $\lim_{x \to 0^+} \frac{k-3x}{2\sqrt{x}} = +\infty$; dunque la funzione $y = f(x)$ ammette come tangente nell'origine l'asse delle ordinate.

La funzione $y = g(x) = x^3 - kx^2$ presenta invece in $x = 0$ un punto stazionario di massimo relativo poiché la derivata prima ha il seguente segno:



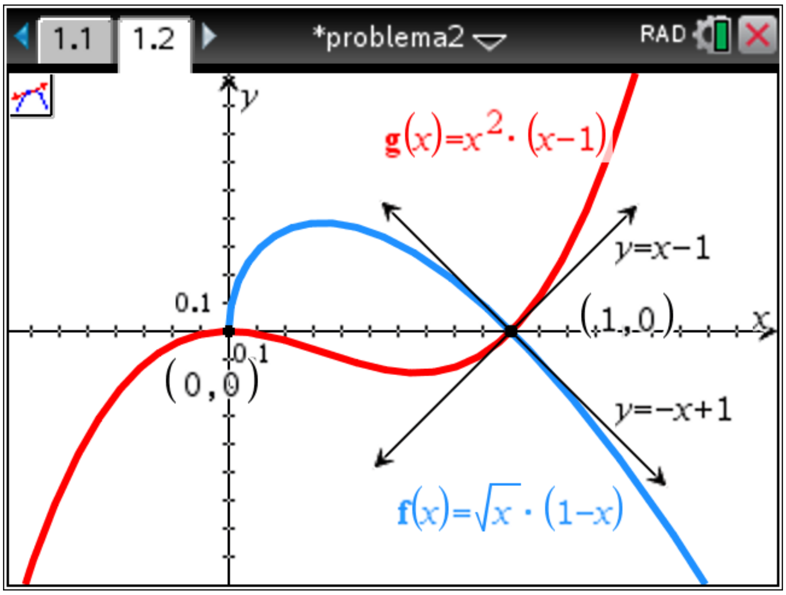
Dunque la funzione $y = g(x)$ ammette come tangente nell'origine l'asse delle ascisse. I due grafici sono perciò ortogonali nell'origine.

L'ulteriore punto di intersezione delle due curve è $(k, 0)$.

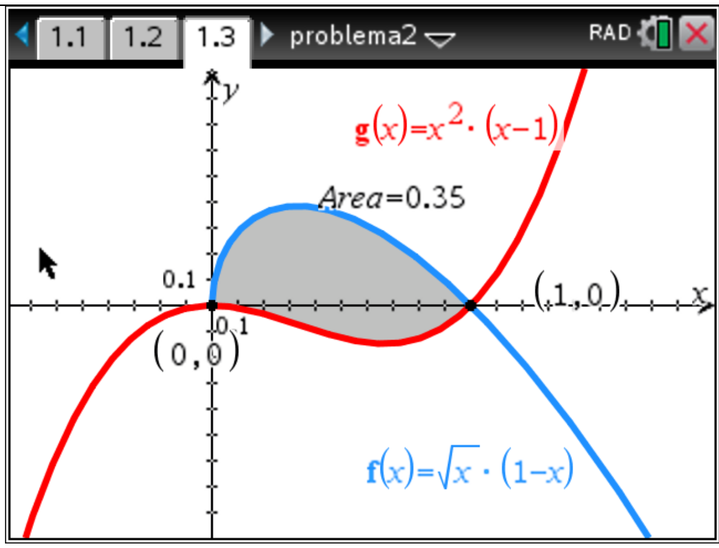
Risulta $f'(k) = -\sqrt{k}$ e $g'(k) = k^2$; dunque le rette tangenti in $(k, 0)$ sono ortogonali se

$-\sqrt{k} \cdot k^2 = -1$ ossia $k = 1$.

Con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX è facile ottenere i seguenti grafici (nel caso k=1 trovato).



Punto 3

Sia S la regione rappresentata in figura (vedi a fianco). La sua area si ottiene calcolando l'integrale: $\int_0^1 [\sqrt{x}(1-x) - x^2(x-1)]dx$ $= \int_0^1 [\sqrt{x} - x\sqrt{x} - x^3 - x^2]dx$ $= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$ $= \frac{7}{20}\ \mathrm{m}^2$ Con la calcolatrice è immediato ottenere l'area della regione S tra i due grafici che vale esattamente 0.35 m^2. Si usa Menu>Analizza grafico>Area delimitata e si scelgono gli estremi di integrazione in modo interattivo.	

Dunque il flusso del campo magnetico attraverso la superficie S è dato da:

$$\Phi_S(\vec{B}) = B_0 S = 2\cdot 10^{-2}\cdot \frac{7}{20}\ \mathrm{Wb} = 7\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}.$$

Punto 4

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz la forza elettromotrice indotta nella spira è uguale all'opposto della derivata del flusso del campo magnetico $\Phi_S(\vec{B}) = B(t) \cdot S = SB_0 e^{-\pi t} cos(\pi t)$ rispetto al tempo t. Dunque:

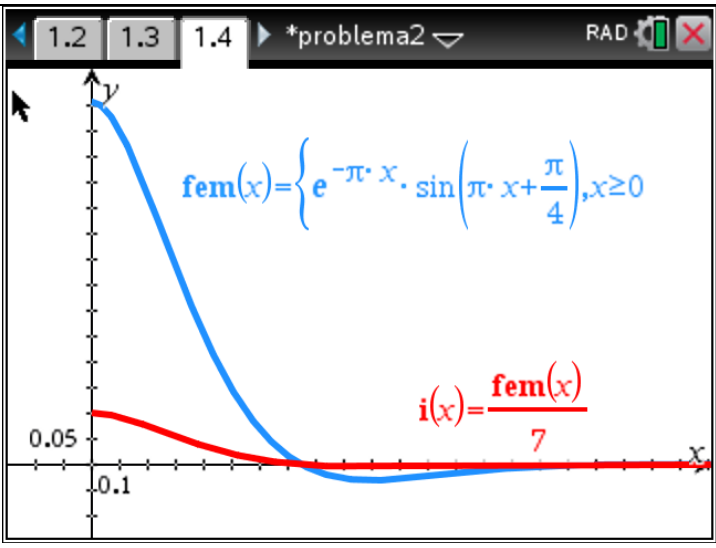
$$fem = -SB_0[-\pi e^{-\pi t} cos(\pi t) - \pi\, sin(\pi t) e^{-\pi t}] = \pi\, SB_0 e^{-\pi t}\left(cos(\pi t) + sin(\pi t)\right).$$

Usando il "metodo dell'angolo aggiunto" si ottiene:
$fem(t) = \sqrt{2}\pi SB_0 e^{-\pi t} sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.
Nella calcolatrice indichiamo il tempo con *x*.
Vedi grafico a fianco (azzurro).

Quindi l'intensità di corrente sarà espressa da:

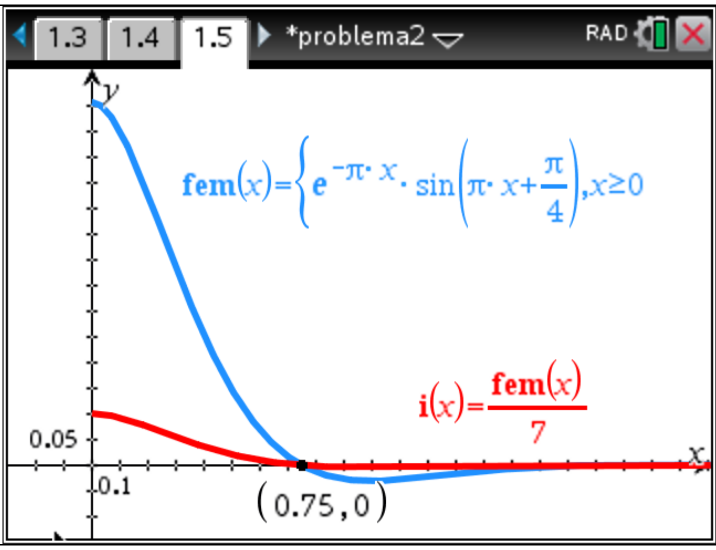
$$i = \frac{fem}{R} = \frac{\sqrt{2}\pi SB_0}{R} e^{-\pi t} sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\pi \cdot 10^{-4} e^{-\pi t} sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ A.}$$

Vedi grafico a fianco (in rosso).
Il grafico è stato ottenuto ponendo R=7 Ω.



La corrente cambia verso (cambia segno) per la prima volta quando $\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ si annulla per la prima volta con $t > 0$, ossia per $t = 0{,}75$ s.
Vedi grafico a fianco ottenuto con la calcolatrice, usando Analizza grafico>Zeri.

Il valore massimo della corrente si ha in $t = 0$ s e vale 31,4 mA.



La relazione tra verso della corrente indotta e variazione del campo magnetico è descritta dalla legge di Lenz: la corrente indotta ha verso tale da generare un campo magnetico indotto che si oppone alla variazione del flusso del campo magnetico che l'ha generata. Quindi se $\Delta\Phi_S(\vec{B}) > 0$, allora la corrente indotta avrà verso tale da generare un campo magnetico indotto con verso opposto a quello esterno; se $\Delta \Phi_S(\vec{B}) < 0$, allora la corrente indotta avrà verso tale da generare un campo magnetico indotto con lo stesso verso di quello esterno.

Commento sul problema 2

Il problema ha un livello di difficoltà medio/alto.
Questo problema, al contrario del primo, parte dalla Matematica per arrivare alla Fisica (forza elettromotrice indotta; legge di Faraday-Neumann-Lenz).
I temi trattati sono presenti sia nel QdR di Matematica che in quello di Fisica (e sono tutti argomenti fondamentali per il V anno) anche se le equazioni goniometriche si svolgono al III o al IV anno.
Per la risoluzione di questo problema la calcolatrice grafica può essere utilissima per tutti i punti 1, 2, 3 e 4 perché si possono tracciare immediatamente i grafici richiesti e visualizzare quanto è richiesto.
Occorre comunque motivare e spiegare le proprietà dei grafici ottenuti e sapere sviluppare i calcoli simbolici richiesti.