

Simulazione di prova scritta di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 2.4.2019

QUESITO 1 (soluzione a cura di S. De Stefani)

1. Assegnato $k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione così definita: $g(x) = \frac{(k-1)x^3 + kx^2 - 3}{x-1}$.

- Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g non abbia asintoti?
- Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g abbia un asintoto obliquo?

Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici delle funzioni ottenute.

Soluzione

Affinché il grafico di g non abbia asintoti, il numeratore deve essere divisibile per $x - 1$.

Se $x = 1$, si ha $k - 1 + k - 3 = 0$, da cui $k = 2$.

La funzione ottenuta diventa pertanto:

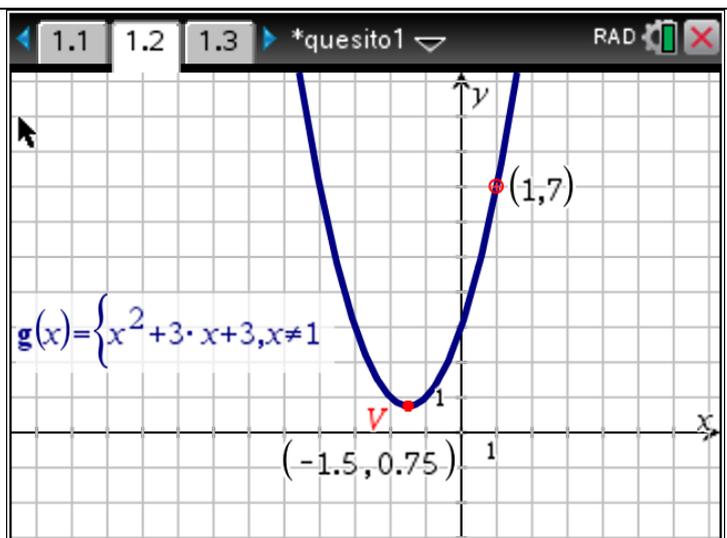
$$y = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 3)}{x-1},$$

che rappresenta una parabola di vertice

$V\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ privata del punto $(1; 7)$.

Vedi la figura a fianco.

Il punto $(1, 7)$ non appartiene al grafico della funzione.



Affinché il grafico di g abbia asintoto obliquo, essendo il denominatore di primo grado, il numeratore deve avere grado 2, per cui $k = 1$.

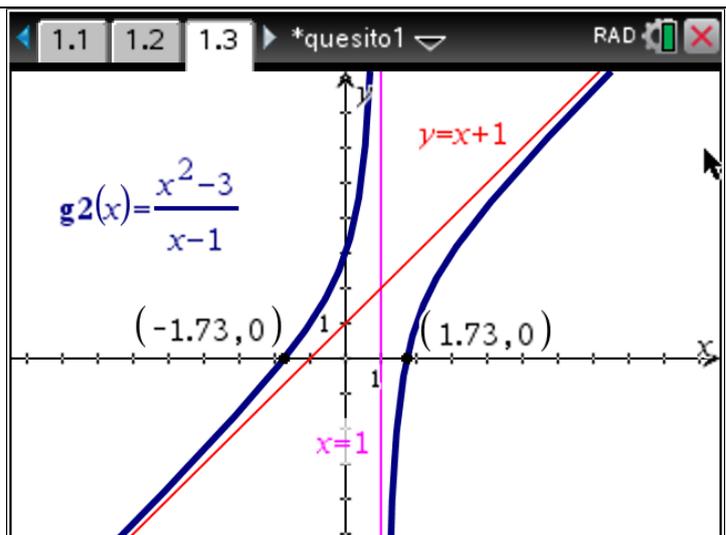
La funzione ottenuta diventa $y = \frac{x^2 - 3}{x-1}$; il grafico è un'iperbole non equilatera (gli asintoti non sono tra loro perpendicolari).

Tale funzione presenta un asintoto verticale per $x = 1$, asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$, interseca gli assi nei punti $(0; 3)$ e $(\pm\sqrt{3}; 0)$.

Per determinare l'asintoto obliquo si può semplicemente eseguire la divisione ed ottenere:

$$y = x + 1 - \frac{2}{x-1}.$$

La derivata prima $y' = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$ è positiva per ogni $x \neq 1$.



Commento sul quesito 1

Livello di difficoltà stimato del quesito: alto.

L'argomento è presente nel QdR di Matematica, ma negli anni precedenti (soprattutto nella classe III: coniche).

Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale.

Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica perché è immediato ottenere i grafici delle funzioni richieste (che comunque sono delle funzioni che hanno per grafico una conica, una parabola privata di un punto ed una iperbole non equilatera).