



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{k}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione f è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di k le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $\tan \gamma = 3$?
- Posto $k = 1$, sia r una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti S e T i punti d'intersezione tra r ed il grafico della funzione f , siano S' e T' le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x . Come deve essere scelto il valore di t , in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T'$?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio R , espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con ρ ed espressa in coulomb al metro cubo (C/m^3), è uniforme.

- Indicata con x la distanza di un punto P dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ \frac{k R^3}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases}$$

dove k è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica ρ e la dimensione fisica.

- Sia q una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica q a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica q a distanza infinita dal centro della sfera?



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMA 2

In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l , misurata in metri (m), di massa m , misurata in chilogrammi (Kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q, posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico \vec{B} , uniforme e costante, perpendicolare al filo (fig. 1) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i , misurata in ampere (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo θ con la direzione verticale (fig. 2).

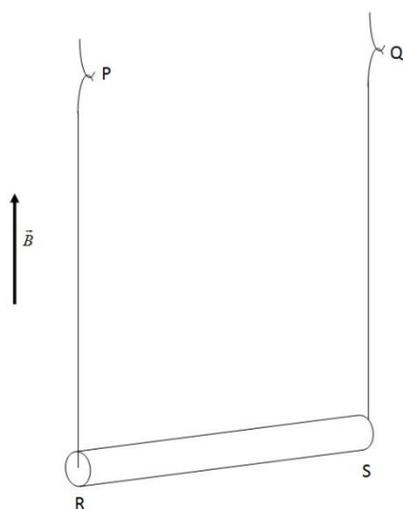


Fig.1

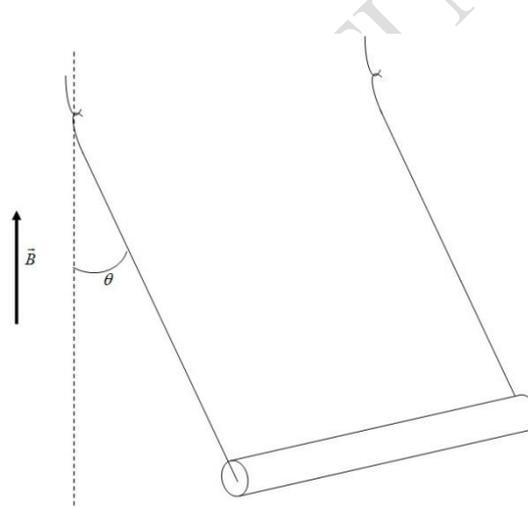


Fig.2

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo \vec{B} agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS. Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?
- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS. Considerando costanti \vec{B} , la massa m e la lunghezza l del filo RS, verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = \arctan\left(\frac{Bl}{mg} \cdot i\right)$, in cui g è l'accelerazione di gravità
- Posto $\theta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy, le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.
- Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

QUESITI

1. Determinare il valore di questo limite: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Data la funzione $f(x) = x \operatorname{sen} x$ e fissato un numero $k > 0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k \cdot f(kx) dx$$

(dove x_0 indica il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0) = 0$) non dipende dalla scelta di k .

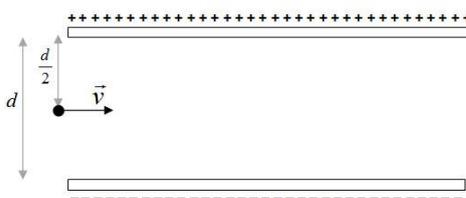
3. Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato BC . Dimostrare che, se la lunghezza di AM è la metà di BC , allora ABC è un triangolo rettangolo.

4. Dopo aver verificato che il punto $T(1, 0, 1)$ appartiene al piano $\pi: x - 2y + 2z = 3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1, 0, 5)$ e tangente in T al piano π .

5. Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
- Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6. Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato $l = 4.0\text{cm}$, distanti $d = 3.0\text{cm}$, è soggetto a una d.d.p. $\Delta V = 15\text{V}$. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità $v_0 = 2.5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia 20cm ?



7. Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5,00 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

8. Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità $B = 0.20T$, con velocità di modulo $v_0 = 1,5 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$, che forma un angolo di 10° con la direzione di \vec{B} . Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

carica elementare	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
massa dell'elettrone	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
massa del protone	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
massa particella alfa	m_α	$6,645 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.