**Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica e Fisica – 20 settembre 2019**

**PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi**

Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione $f$ è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di $k$ le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto $\gamma$ tale che $\tan\gamma = 3$ ?

- Posto $k = 1$, sia $r$ una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti $S$ e $T$ i punti d'intersezione tra $r$ ed il grafico della funzione $f$, siano $S'$ e $T'$ le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse $x$. Come deve essere scelto il valore di $t$, in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T$?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio $R$, espresso in metri $(m)$. La densità di carica, indicata con $\rho$ ed espressa in coulomb al metro cubo $(C/m^3)$, è uniforme.

- Indicata con $x$ la distanza di un punto $P$ dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \le x \le R \\ \dfrac{k\,R^3}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases}$$

dove $k$ è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica $\rho$ e la dimensione fisica.

- Sia $q$ una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica $q$ a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica $q$ a distanza infinita dal centro della sfera?

**Soluzione**

Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Consideriamo le funzioni parametriche assegnate nell'insieme dei reali non negativi.
Indichiamo con delle lettere le varie richieste del testo.

**Punto a)**

- Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione $f$ è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di $k$ le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto $\gamma$ tale che $\tan\gamma = 3$ ?

Per $k > 0$, si ottiene il grafico riportato in figura 1.

La funzione è continua, ma ha un punto di non derivabilità per $x = 1$, che è il punto di massimo assoluto, dove si ha $f(1) = k$.

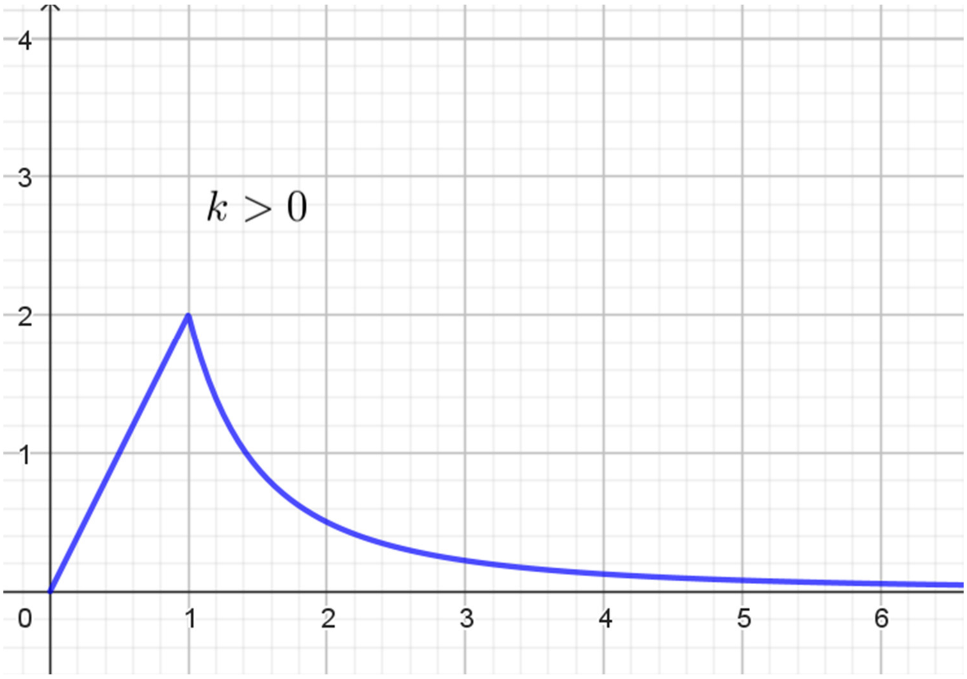

figura 1

La derivata destra per $x = 1$, vale $f'_+(1) = -2k$.

La derivata sinistra $x = 1$, vale $f'_-(1) = k$.

Detto $\gamma$ l'angolo tra le due rette tangenti, si ha

$$\tan\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Per trovare quello acuto, occorre imporre:

$$\tan\gamma = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

Pertanto si ha

$$\left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right] = 3$$

da cui si ricava

$$\left|\frac{3k}{1 - 2k^2}\right| = 3$$

ossia

$$\left|\frac{k}{1-2k^2}\right| = 1 \quad .$$

Si ottiene:

$$\frac{k}{1-2k^2} = \pm 1$$

$$2k^2 - k - 1 = 0 \quad \text{oppure} \quad 2k^2 - k - 1 = 0$$

$$k = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad \text{oppure} \quad k = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Pertanto si ottengono le soluzioni $k = -1$, $k = \frac{1}{2}$ (non accettabile, anche se il testo non è chiaro) oppure $k = 1, k = -\frac{1}{2}$ (non accettabile, anche se il testo non è chiaro) e l'angolo $\gamma$ è circa $\gamma \approx (71{,}57\ \ldots)°$.

La figura 2 si riferisce al caso $k = 1$, in cui la tangente destra ha pendenza 1 e la tangente sinistra ha pendenza $-2$.

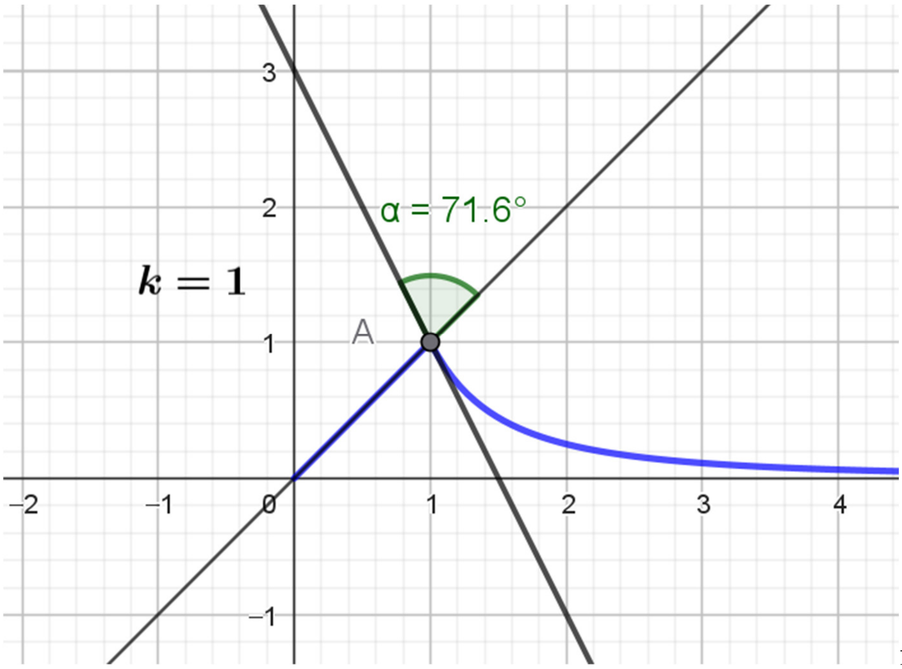


figura 2

Nel caso $k = -1$, la tangente destra ha pendenza 2 e la tangente sinistra ha pendenza $-1$ (figura 3).

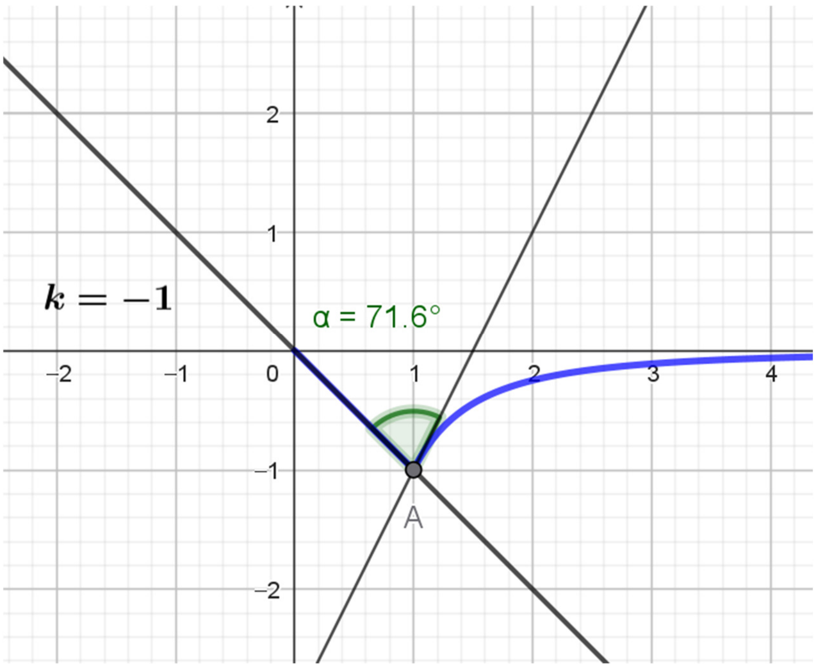

figura 3

**Punto b)**

- Posto $k = 1$, sia $r$ una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti $S$ e $T$ i punti d'intersezione tra $r$ ed il grafico della funzione $f$, siano $S'$ e $T'$ le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse $x$. Come deve essere scelto il valore di $t$, in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T$?

Disegniamo il grafico della funzione per $k = 1$ e lo intersechiamo con la retta di equazione $y = t$ con $0 < t < 1$.

Si ottengono i punti di coordinate $S(t, t)$ e $T\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, t\right)$ e proiettando sull'asse delle ascisse i punti $S'(t, 0)$ e $T'\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, 0\right)$.

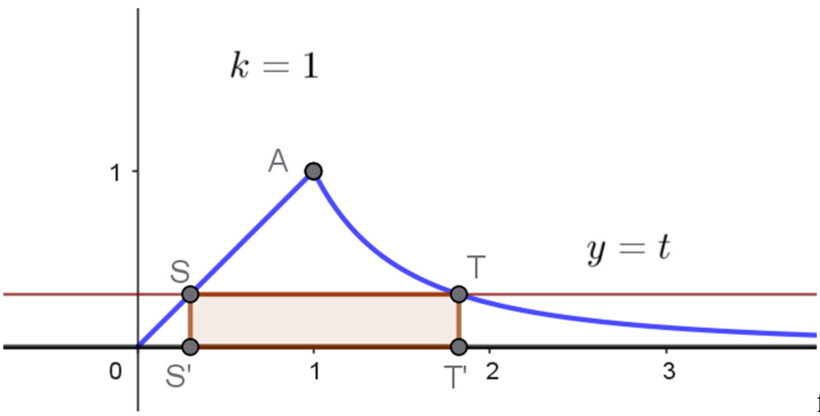

figura 4

L'area del rettangolo $S'T'TS$ è pertanto

$$Area(S'T'TS) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - t\right)t = \sqrt{t} - t^2 \qquad (0 < t < 1).$$

Indicata con $g(t)$ questa funzione, si ha:

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = \frac{1 - 4t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}},$$

che è positiva o nulla se e solo se

$$1 - 4t\sqrt{t} \geq 0$$

ossia per $0 < t < \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$. Pertanto l'area del rettangolo è massima per $t = \frac{\sqrt[3]{4}}{4} \approx 0{,}397$ (in figura 5 per il grafico della funzione area).

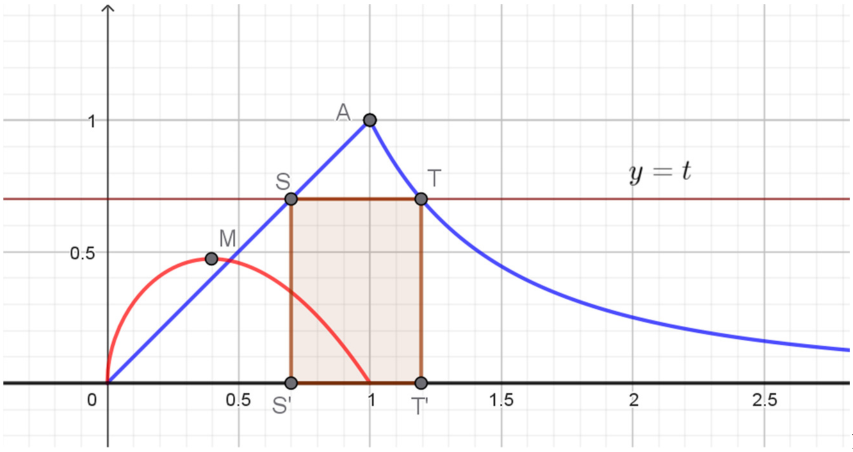

figura 5

**Punto c)**

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio $R$, espresso in metri $(m)$. La densità di carica, indicata con $\rho$ ed espressa in coulomb al metro cubo $(C/m^3)$, è uniforme.

- Indicata con $x$ la distanza di un punto $P$ dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ \dfrac{k\,R^3}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases}$$

dove $k$ è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica $\rho$ e la dimensione fisica.

Consideriamo ora una distribuzione sferica di carica positiva di raggio $R$ con densità uniforme.

Usando il teorema di Gauss sul flusso del campo elettrostatico, si dimostra quanto indicato nel testo.

Consideriamo una superficie sferica $\Sigma$ di raggio $x \leq R$ . Applicando la definizione di flusso del campo elettrico, attraverso la superficie sferica di raggio $x$, otteniamo:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 4\pi x^2 E.$$

Infatti il vettore campo elettrico è radiale, positivo (uscente dalla superficie sferica) e quindi perpendicolare in ogni punto alla superficie sferica.

Applichiamo ora il teorema di Gauss per il flusso del campo elettrostatico (nel vuoto):

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi x^3}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\frac{\rho\pi x^3}{\varepsilon_0}.$$

Uguagliando, si ottiene il modulo del campo elettrico (misurato in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$):

$$4\pi x^2 E = \frac{4}{3}\frac{\rho\pi x^3}{\varepsilon_0}$$

ossia

$$E(x) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}x \qquad (0 \le x \le R)$$

che è una funzione lineare della distanza *x*.

Consideriamo ora una superficie sferica Σ di raggio $x > R$ . Applicando la definizione di flusso del campo elettrico otteniamo:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 4\pi x^2 E.$$

Applichiamo ora il teorema di Gauss per il flusso del campo elettrostatico (nel vuoto):

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\frac{\rho\pi R^3}{\varepsilon_0}.$$

Uguagliando, si ottiene il modulo del campo elettrico

$$4\pi x^2 E = \frac{4}{3}\frac{\rho\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

ossia

$$E(x) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{x^2} \qquad (x > R)$$

che è una funzione dell'inverso del quadrato della distanza *x*.

Pertanto il modulo del campo elettrostatico (vettore radiale, positivo) è dato dalla seguente funzione:

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}x & \text{se } x \le R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases}$$

Indichiamo ora con

$$k = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.$$

Ricordando che $\rho$ si misura in $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$ e che la costante $\varepsilon_0$ si misura in $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, la costante *k* ha le seguenti dimensioni fisiche

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\cdot\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}.$$

Si ottiene quindi

$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } \ x \leq R \\ \dfrac{kR^3}{x^2} & \text{se } \ x > R \end{cases}$$

come si doveva trovare e che corrisponde alla funzione studiata nei primi due punti precedenti (di matematica).

**Punto d)**

- Sia $q$ una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica $q$ a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica $q$ a distanza infinita dal centro della sfera?

Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica è dato da $0$ a $2R$ è dato da

$$W = \int_0^{2R} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^{2R} q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} = q\int_0^{2R} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} =$$
$$= q\left(\int_0^{R} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} + \int_R^{2R} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx}\right).$$

Si ottiene quindi:

$$W = q\left(\int_0^{R} kx\,dx + \int_R^{2R} kR^3 \frac{1}{x^2}dx\right).$$

Poiché $q = e$, si ha:

$$W = ke\left(\int_0^{R} x\,dx + R^3\int_R^{2R} \frac{1}{x^2}dx\right)$$

$$W = ke\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^R + R^3\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{2R}\right) = ke\left(\frac{R^2}{2} + R^3\frac{1}{2R}\right) = ke\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}\right) = keR^2.$$

---

Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica quando si trasporta la carica elementare positiva da $0$ a $+\infty$ è dato da

$$W = \int_0^{+\infty} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^{+\infty} q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} = q\int_0^{+\infty} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} =$$
$$= q\left(\int_0^{R} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} + \int_R^{+\infty} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx}\right).$$

Si ottiene quindi:

$$W = q\left(\int_0^{R} kx\,dx + \int_R^{+\infty} kR^3 \frac{1}{x^2}dx\right).$$

Il primo integrale è:

$$W_1 = ke\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^R = ke\left(\frac{R^2}{2}\right) = ke\frac{R^2}{2}.$$

Il secondo integrale (con $x > R$) è:

$$W_2 = ke\left(R^3\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{+\infty}\right) = \lim_{r\to+\infty} keR^3\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} keR^3\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{R}\right) = keR^3\left(\frac{1}{R}\right) = keR^2\,.$$

Pertanto si ha:

$$W = \int_0^{+\infty} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dx} = W_1 + W_2 = ke\frac{R^2}{2} + keR^2 = ke\frac{3R^2}{2} = \frac{e\rho R^2}{2\varepsilon_0}.$$

Osservazione. Nel terzo punto del testo del problema, le unità di misura sono indicate in corsivo, in modo errato. Dovevano essere scritte "in tondo", ossia con carattere normale, non corsivo.

### Commento sintetico

Argomento prevalente: analisi matematica ed elettrostatica; campo elettrostatico. Teorema di Gauss per il campo elettrostatico. Il problema parte dalla Matematica ed arriva alla Fisica e richiede una certa abilità di collegamento da parte della/del candidata/o.

**Tabella di analisi/commento del problema**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Livello di difficoltà stimato | ☐ Basso | ☐ Medio | ☒ Alto | ☐ Molto alto | |
| Formulazione del problema | ☐ Scorretta | ☐ Ambigua | ☒ Poco chiara | ☐ Corretta | ☐ Molto chiara |
| Si tratta di un problema contestualizzato | ☐ No | ☐ Parzialmente | ☒ In modo accettabile | ☐ Ben contestualizzato | |
| L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali | ☒ Sì | ☐ No | ☐ Non è esplicitato / Non è chiaro | | |
| L'argomento è presente nel QdR di Matematica e di Fisica? | ☒ Sì | ☐ No | ☐ Non è esplicitato / Non è chiaro | | |
| Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? | ☒ Sì | ☐ No | ☐ Non sempre | | |
| È un argomento presente nei libri di testo? | ☐ No | ☐ Non sempre | ☒ Sempre | | |
| Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali? | ☒ Sì | ☐ Solo parzialmente | ☐ No | | |
| Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica? | ☒ Sì | ☐ No | ☐ Parzialmente | | |