

**Esame di Stato - sessione straordinaria - seconda prova scritta- Liceo Scientifico - Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate - Liceo Scientifico Sezione ad indirizzo sportivo - Prova scritta di Matematica e Fisica - 20 settembre 2019**

**QUESITO 1** - soluzione a cura di L. Tomasi

1. Determinare il valore di questo limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$ .

**Soluzione.** La funzione  $f(x) = (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$  deve avere la base  $1 - \sin x > 0$ . Non è quindi definita per  $x = \pi/2 + 2k\pi$ . Inoltre non è definita per  $x = 0$ .

Il limite assegnato si presenta come forma d'indeterminazione del tipo  $1^\infty$ . Considerati il dominio e la definizione di logaritmo, possiamo riscrivere la funzione  $f(x)$  nella forma

$$f(x) = e^{\ln(1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 - \sin x)}$$

e studiare il limite dell'esponente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x}.$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  ma, ricorrendone le ipotesi, possiamo utilizzare la prima regola di De l'Hôpital. Otteniamo quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\cos x}{1 - \sin x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = -1.$$

Ne segue che il limite assegnato vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1} = \frac{1}{e}.$$