Esame di Stato - sessione straordinaria - seconda prova scritta- Liceo Scientifico - Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate - Liceo Scientifico Sezione ad indirizzo sportivo - Prova scritta di Matematica e Fisica - 20 settembre 2019

QUESITO 2 - soluzione a cura di C. N. Colacino

2. Data la funzione $f(x) = x \sin x$ e fissato un numero $k > 0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} kf(kx)\mathrm{d}x$$

dove x_0 è il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0) = 0$, non dipende dalla scelta di k.

Soluzione. Si ha: $f(kx) = kx\sin(kx)$. Imporre $f(kx_0) = 0$ significa, per la legge di annullamento del prodotto, imporre $\sin(kx_0) = 0$, essendo $kx_0 > 0$. Il minimo valore positivo dell'argomento per cui la funzione $\sin(\alpha)$ si annulla è $\alpha = \pi$, da cui $kx_0 = \pi$, che dà $x_0 = \pi/k$.

Calcolo ora l'integrale

$$\int_0^{x_0} kf(kx)\mathrm{d}x.$$

Per fare questo pongo $y = kx$ da cui $\int \mathrm{d}y = \int k\mathrm{d}x$ e calcolo la generica primitiva:

$$\int kf(kx)\mathrm{d}x = \int y\sin y\mathrm{d}y.$$

Questo integrale si risolve per parti:

$$\int y\sin y\mathrm{d}y = -y\cos y + \int \cos y\mathrm{d}y = -y\cos y + \sin y + c.$$

Tornando alla variabile originaria e all'integrale definito si trova

$$\int_0^{x_0} kf(kx)\mathrm{d}x = -kx\cos(kx)\Big|_0^{x_0} + \sin(kx)\Big|_0^{x_0}.$$

Il secondo addendo non dà contributo; pertanto si ha:

$$\int_0^{x_0} kf(kx)\mathrm{d}x = -kx_0\cos(kx_0) = -k\frac{\pi}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{k}\right) = -\pi\cdot(-1) = \pi,$$

valore indipendente dalla scelta di k.