

Esame di Stato - sessione straordinaria - seconda prova scritta- Liceo Scientifico - Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate - Liceo Scientifico Sezione ad indirizzo sportivo - Prova scritta di Matematica e Fisica - 20 settembre 2019

QUESITO 5 - soluzione a cura di C.N. Colacino

5. Da un mazzo di 40 carte da gioco vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
- Qual è la probabilità che tra le carte estratte vi siano esattamente due assi?

Soluzione. [Osservazione. Questo problema può essere risolto in due modi, li vediamo entrambi perché molto istruttivi.]

Il primo metodo fa uso della definizione classica di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi totali. Il numero di modi in cui possiamo scegliere 6 carte tra 40 è $\binom{40}{6} = 3838380$. Il numero di modi in cui possiamo scegliere 6 carte solo tra le 20 nere -chiedere che non ci siano carte rosse vuol dire chiedere che tutte le carte estratte siano nere- è $\binom{20}{6} = 38760$. Ne segue che

$$P(6 \text{ carte nere}) = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{40}{6}} \approx 0,01 = 1\%.$$

Analogamente il numero di modi in cui possiamo scegliere due assi su quattro è $\binom{4}{2} = 6$ ed il numero di modi in cui possiamo scegliere 4 carte sulle restanti 36 (40 meno i 4 assi) è $\binom{36}{4} = 353430$, da cui segue:

$$P(2 \text{ assi}) = \frac{\binom{36}{4} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{40}{6}} = \frac{353430 \cdot 6}{3838380} \approx 0,09 = 9\% \quad (1)$$

Il secondo metodo fa uso del concetto di probabilità condizionata, molto importante in probabilità. Dati due eventi A e B , la probabilità che si verifichino entrambi è:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

dove $P(A)$ è la probabilità che si verifichi A e $P(B|A)$ è la probabilità che si verifichi B condizionata al verificarsi di A . Il problema in questione è equivalente a sei estrazioni consecutive senza reimmissione delle carte estratte. La probabilità che la prima carta estratta sia nera è ovviamente $P(1N) = 1/2$ dato che ci sono 40 carte di cui 20 nere. La probabilità che la seconda carta estratta sia nera avendo assunto che fosse nera anche la prima è $P(2N|1N) = 19/39$ dato che sono rimaste 39 carte di cui 19 nere e la probabilità che anche la terza carta sia nera è $P(3N|1N2N) = 9/19$, essendo rimaste 38 carte di cui 18 nere. Proseguendo il ragionamento si ha:

$$P(1N \cap 2N \cap 3N \cap 4N \cap 5N \cap 6N) = \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} \cdot \frac{18}{38} \cdot \frac{17}{37} \cdot \frac{16}{36} \cdot \frac{15}{35} \approx 0,01 = 1\%$$

Analogamente la probabilità che la prima carta estratta sia un asso è $P(1A) = 1/10$, la probabilità che la seconda carta sia estratta sia anch'essa un asso è $P(2A|1A) = 1/13$ (sono rimaste 39 carte di cui 3 assi), la probabilità che la terza carta estratta non sia un asso dopo che le prime due lo

erano è $P(3 \text{ non } A | 1A2A) = 18/19$ (sono rimaste 38 carte di cui 36 non assi) e così via. Il numero di sequenze in cui su sei estrazioni si presentano esattamente due assi è $\binom{6}{2} = 15$, ne segue:

$$P(2 \text{ assi}) = \binom{6}{2} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{36}{38} \cdot \frac{35}{37} \cdot \frac{34}{36} \cdot \frac{33}{35} \approx 15 \cdot 0,006 = 0,09 = 9\%$$

I due metodi ovviamente conducono, come si vede, allo stesso risultato.