Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica e Fisica – 4 luglio 2019

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \dfrac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione
$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$
si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.
- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx. Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = 9/2$ e $k = 1$, calcolare l'energia $\mathcal{E}$ assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

Soluzione

Consideriamo la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \dfrac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Tutte le funzioni $f_a(x)$, al variare del parametro reale *a*, hanno come dominio $\mathbb{R}$.

Indichiamo con delle lettere i vari punti richiesti.

Punto a)

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.

Per $a = 0$, si ottiene

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

che ha un punto discontinuità per $x = 0$ e grafico indicato in figura 1.

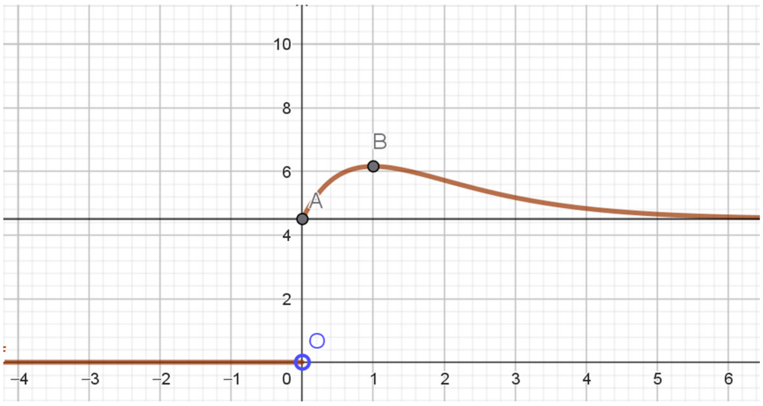

figura 1

La retta di equazione $y = \frac{9}{2}$ è asintoto orizzontale a destra qualunque sia a.

Per $a \neq 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f_a(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{9a}{4(x-1)^4} = \frac{9a}{4}.$$

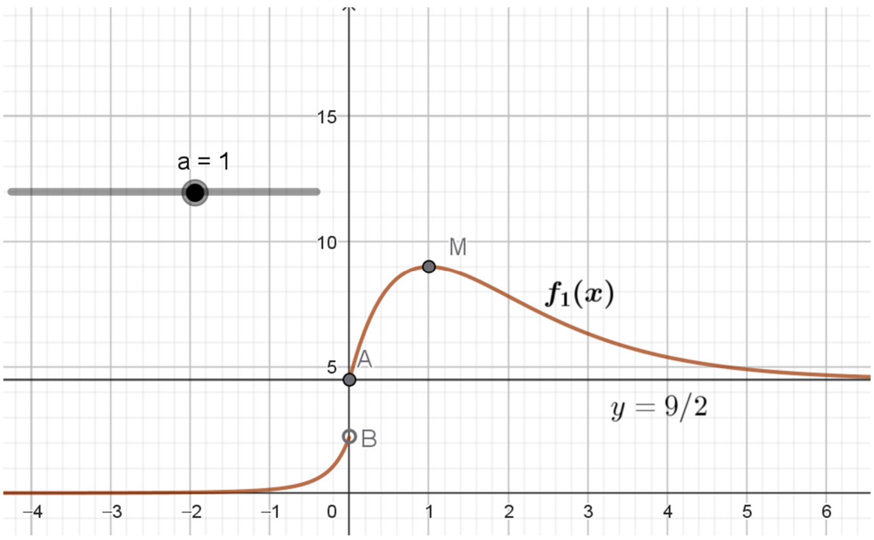

figura 2

Pertanto nel punto $x = 0$ la funzione ha una discontinuità (un salto), figura 2, tranne nel caso in cui i due limiti, destro e sinistro, siano uguali, il che si verifica per $a = 2$. Infatti deve essere

$$\frac{9a}{4} = \frac{9}{2},$$

che fornisce $a = 2$ (figura 3).

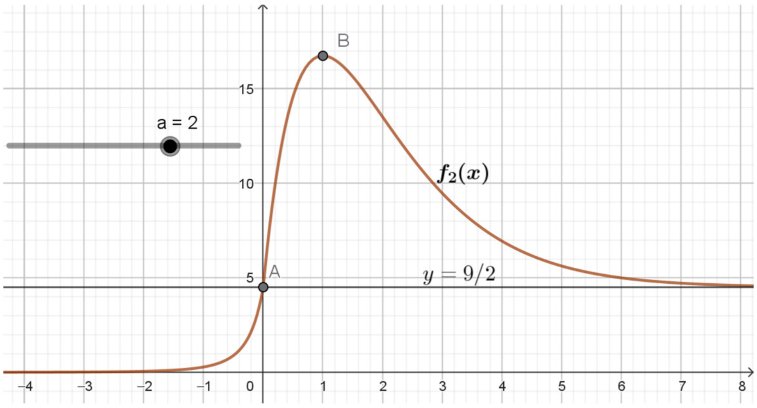

figura 3

Si ha inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) = \frac{9}{2}$$

e quindi la retta di equazione $y = \frac{9}{2}$ è asintoto orizzontale a destra;

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{9a}{4(x-1)^4} = 0^+$$

l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale a sinistra.

Se $a \geq 0$ la funzione è sempre non negativa.

Se $a < 0$ la funzione è negativa per $x < 0$ e positiva altrove (figura 4).

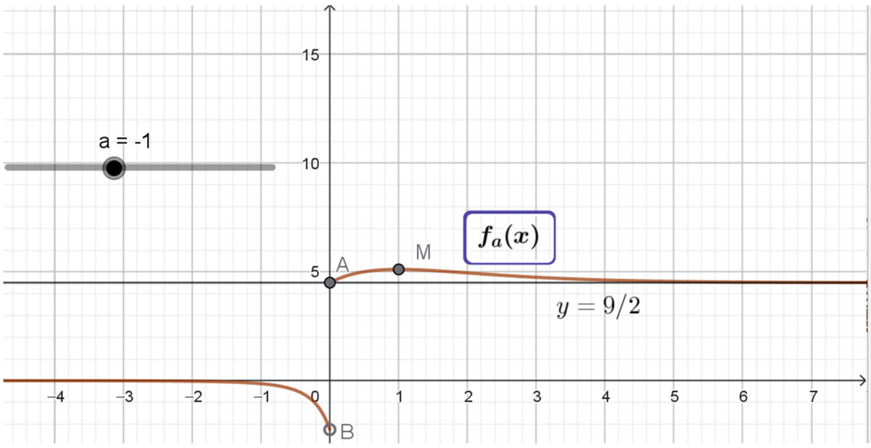

figura 4

Calcoliamo la derivata prima della funzione; si ottiene:

$$f_a{}'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2} e^{a-x}(1-x) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{-9a}{(x-1)^5} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Se $a \geq 0$ il segno della derivata prima è quello descritto nel seguente schema (figura 5).

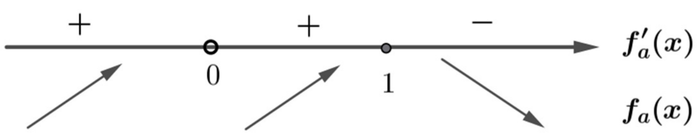

figura 5

Il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità e quindi anche di non derivabilità.

Quindi $x = 1$ è un punto di massimo relativo (e assoluto) che vale

$$f_a(1) = \frac{9}{2}(1 + e^{a-1}).$$

Se $a < 0$ il segno della derivata prima è quello descritto nel seguente schema (figura 6).

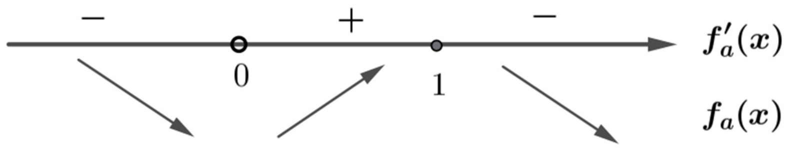

figura 6

Quindi $x = 1$ è in ogni caso un punto di massimo relativo (e assoluto).

Punto b)

- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione
$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$
si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.

Nel caso $a = 2$, nel punto $x = 0$ la funzione è continua, come abbiamo visto, ma non è derivabile. Infatti, la derivata destra vale

$$f_+{}'(0) = \frac{9}{2}e^2 \approx 33{,}25$$

mentre la derivata sinistra vale

$$f_-{}'(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 18.$$

Come abbiamo visto in precedenza, il grafico della funzione possiede gli asintoti orizzontali di equazioni $y = \frac{9}{2}$, a destra, e l'asse delle ascisse, a sinistra.

Indichiamo semplicemente con $f(x)$ la funzione ottenuta per $a = 2$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{2-x}(1 - x) & \text{per } x \geq 0 \\ -\frac{18}{(x-1)^5} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(-e^{2-x}(1-x) - e^{2-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{90}{(x-1)^6} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ossia:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{2-x}(x-2) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{90}{(x-1)^6} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Pertanto il segno della derivata seconda è riassunto nello schema seguente (figura 7).

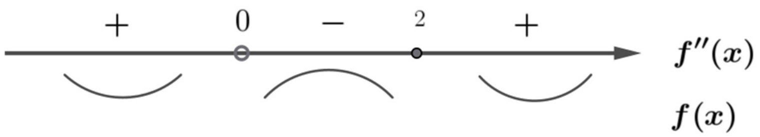

figura 7

Il punto $x = 2$ è quindi un punto di flesso ascendente.
Il punto $x = 0$ è un punto di non derivabilità e quindi non è un punto di flesso, anche se in esso cambia la convessità (la funzione è convessa per $x < 0$ e concava per $x \geq 0$).

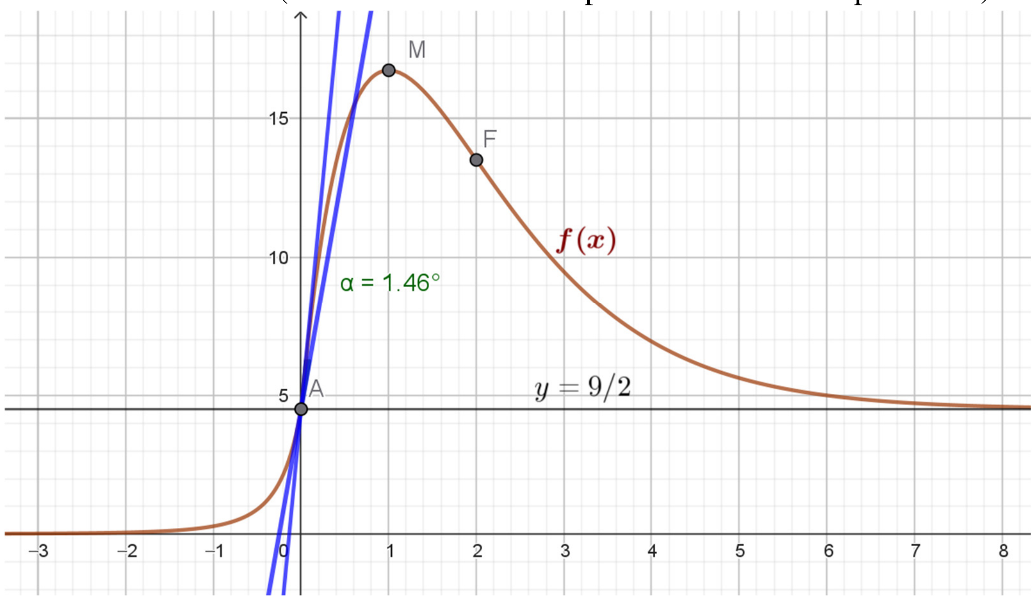

figura 8

La tangente destra nel punto $x = 0$ ha equazione

$$y = \frac{9}{2}e^2 x + \frac{9}{2}\ ;$$

la tangente sinistra ha equazione

$$y = 18x + \frac{9}{2}.$$

La tangente dell'angolo (acuto) compreso tra queste due rette (figura 8) è data da:

$$\tan\alpha = \frac{m_d - m_s}{1 + m_d m_s} = \frac{\frac{9}{2}e^2 - 18}{1 + \frac{9}{2}e^2 \cdot 18} = \frac{9e^2 - 36}{2 + 162e^2}$$

Pertanto si ha

$$\alpha = \arctan\left(\frac{9e^2-36}{2+162e^2}\right) \approx (1{,}46\ldots)^\circ.$$

Infine (in questo punto…) viene richiesto di determinare le costanti positive h, k tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h[1 + (3-kx)e^{kx-1}]$$

si abbia

$$g(3-x) = f(x)$$

per $x \geq 0$.

Ora dobbiamo imporre

$$g(3-x) = f(x)$$

ossia

$$h\big[1 + (3-k(3-x))e^{k(3-x)-1}\big] = \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x})$$

per $x \geq 0$.

Poiché $x \geq 0$, si ricava $h = \frac{9}{2}$.

Inoltre deve essere

$$3 - 3k + kx = x$$

ovvero

$$3(1-k) = (1-k)x$$

per ogni $x \geq 0$

$$(k-1)(x-3) = 0.$$

Quindi si ha $k = 1$.

In definitiva si ha:

$$\begin{cases} h = \dfrac{9}{2} \\ k = 1 \end{cases}$$

Quindi la funzione è

$$g(x) = \frac{9}{2}(1 + (3-x)e^{x-1}).$$

Tenuto conto dell'ipotesi $x \geq 0$ e della condizione $g(3-x) = f(x)$, ne consegue che il dominio della funzione $g(x)$ deve essere l'intervallo $0 \leq x \leq 3$. Il grafico di $g(x)$ è riportato nella figura 9.

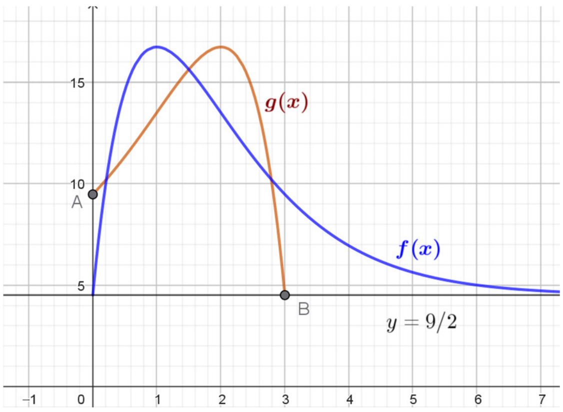

figura 9

Punto c)

- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.

Consideriamo il campo magnetico perpendicolare al piano (Oyz) della figura 10 e verso uscente dal piano. Quindi il campo magnetico ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse x nel riferimento spaziale $Oxyz$ scelto.

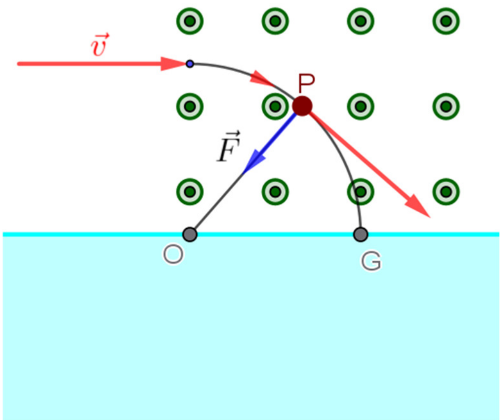

figura 10

La forza di Lorentz (con campo elettrico nullo) è data da:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

e agisce ortogonalmente al vettore velocità e al vettore campo magnetico.
Il modulo della forza, essendo il campo magnetico ortogonale al vettore velocità, è dato da:

$$F = qvB.$$

Questa forza costituisce la forza centripeta; si ha quindi:

$$m\frac{v^2}{r} = qvB.$$

Si ottiene quindi il raggio (detto a volte "raggio di ciclotrone") della traiettoria circolare:

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Poiché l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

si ricava

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

e quindi

$$v = \sqrt{\frac{2(42 \cdot 10^3 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J})}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} = 8{,}969 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Quindi il raggio della traiettoria sarà:

$$r = \frac{(1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot \left(8{,}969 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}) \cdot (0{,}24\ \mathrm{T})} = 3{,}902\ \mathrm{m}.$$

Punto d)

- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx. Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = 9/2$ e $k = 1$, calcolare l'energia $\mathcal{E}$ assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

L'energia inziale di un protone (trascuriamo la forza peso), quando entra nell'acqua, è

$$\mathcal{E}(0) = 40 \text{ MeV};$$

infatti durante il tratto circolare della traiettoria il protone non perde energia perché la forza di Lorentz è perpendicolare al vettore velocità e quindi non compie lavoro.

L'energia $\mathcal{E}(x)$ del fascio di protoni quando entra nell'acqua è decrescente.

$$-\frac{d\mathcal{E}(x)}{dx} = g(x)$$

Questa è un'equazione differenziale (ordinaria, del primo ordine, a variabili separabili) da cui si ricava che l'unità di misura di $g(x)$ deve essere espressa in

$$\frac{\text{MeV}}{\text{cm}}.$$

La diminuzione di energia nel tratto dx è:

$$d\mathcal{E}(x) = -g(x)dx$$

Nello stesso tratto dx l'energia assorbita dall'acqua è pertanto:

$$dW = g(x)dx.$$

La quantità di energia assorbita dall'acqua (in MeV) sarà quindi espressa dal seguente integrale (la distanza percorsa è misurata in cm):

$$W = \int_0^3 g(x)dx = \frac{9}{2}\int_0^3 \left(1 + (3-x)e^{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\int_0^3 dx + \int_0^3 (3-x)e^{x-1}dx\right) = \frac{9}{2}\left(\int_0^3 dx + \int_0^3 (3-x)e^{x-1}dx\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\left(3 + \int_0^3 (3-x)e^{x-1}dx\right) = \frac{27}{2} + \frac{9}{2}\boxed{\int_0^3 (3-x)e^{x-1}dx}.$$

Calcoliamo (per parti) l'integrale indefinito:

$$\int (3-x)e^{x-1}dx \ ;$$

fattore differenziale = $e^{x-1}dx$,

fattore finito = $(3-x)$.

Si ottiene quindi:

$$\int (3-x)e^{x-1}dx = (3-x)e^{x-1} - \int -e^{x-1}dx = (4-x)e^{x-1} + c.$$

Tornando all'integrale definito indicato sopra, in riquadro, si ha

$$\int_0^3 (3-x)e^{x-1}dx = [(4-x)e^{x-1}]_0^3 = e^2 - \frac{4}{e} = \frac{e^3-4}{e}.$$

Pertanto si ottiene

$$W = \frac{27}{2} + \frac{9}{2}\int_0^3 (3-x)e^{x-1}dx = \frac{27}{2} + \frac{9}{2}\cdot\frac{e^3-4}{e} = \frac{27e + 9e^3 - 36}{2e} \approx 40{,}13 \text{ MeV}.$$

Quindi il protone cede 40,13 MeV all'acqua.

Commento. Problema complicato e piuttosto laborioso sia per la parte di matematica che per quella di fisica. Argomenti: Analisi matematica; studio di funzione, elettromagnetismo, forza di Lorentz.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☒ Poco chiara in alcuni punti	☐Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☒ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica e di Fisica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì	☐ No	☒ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica e di Fisica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sì		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		