Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica e Fisica – 4 luglio 2019

PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi

Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B, posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B.

- Determinare, in un punto C della retta r, l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, al variare di C su r. Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB. Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x.
- Fissati i parametri reali positivi h e k, studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

  individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.
- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

  con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f.
  Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

Soluzione

Consideriamo le due cariche elettriche collocate sull'asse delle *x* e simmetriche rispetto all'origine degli assi ($Oxyz$).

La situazione assegnata è quella di un dipolo elettrico.

Indichiamo con delle lettere i vari punti richiesti dal problema.

Punto a)

- Determinare, in un punto C della retta r, l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, al variare di C su r. Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.

Il quesito presenta il classico dipolo elettrico, formato da due cariche opposte collocate a una certa distanza (figura 1).

Facciamo coincidere la retta *r* con l'asse delle *x* e il punto medio tra le due cariche con l'origine *O* degli assi coordinati.

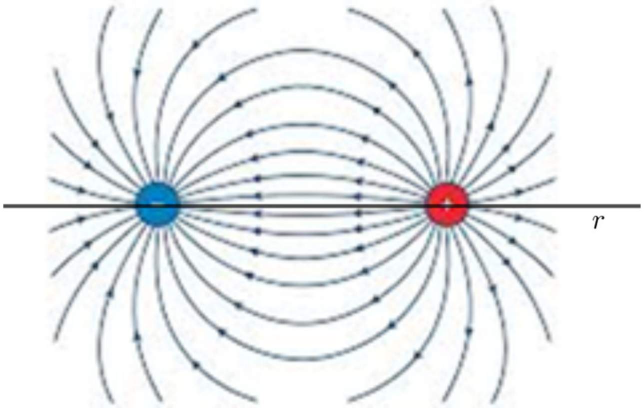

figura 1

Fissiamo $k > 0$, e indichiamo con $A(k,0)$ e $B(-k,0)$ le coordinate dei punti dove sono state rispettivamente poste le cariche $+q$ e $-q$ sull'asse delle ascisse.

Indichiamo con $\vec{E}_1$ il campo elettrico generato dalla carica positiva q e con $\vec{E}_2$ quello generato dalla carica negativa $-q$.

In ogni punto dello spazio, tranne i punti *A* e *B*, il campo elettrico (figura 2) è dato dal principio di sovrapposizione:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

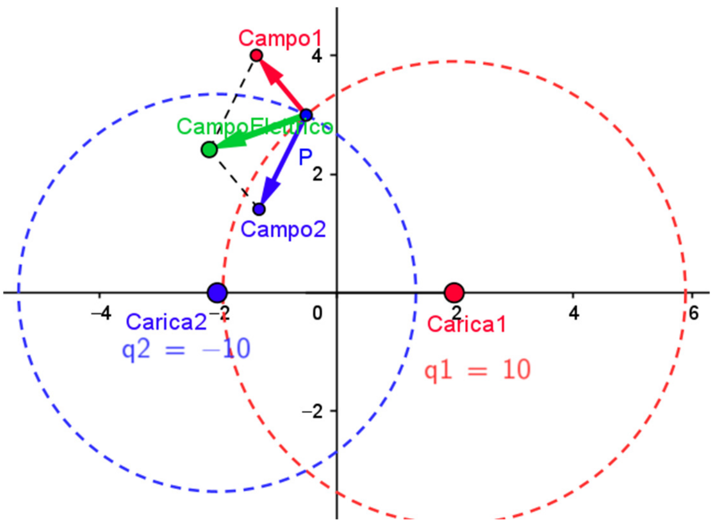

figura 2

Quindi sull'asse delle ascisse, esclusi i punti *A* e *B*, il campo elettrico ha la stessa direzione dell'asse *x* e verso positivo per $|x| > k$, mentre per $|x| < k$, il campo elettrico ha verso negativo.

Il campo elettrico generato da una carica puntiforme *Q* è radiale (direzione delle semirette aventi origine nel punto dove è posta la carica) ed ha intensità:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto.

L'intensità del campo elettrostatico (nel vuoto) in un punto *C* della retta *r* di ascissa *x* sarà pertanto

$$E(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(x-k)^2}+\frac{-q}{(x+k)^2}\right) & se\ |x|>k\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q}{(x-k)^2}-\frac{q}{(x+k)^2}\right) & se\ |x|<k\end{cases}$$

ossia:

$$E(x)=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x-k)^2}-\frac{1}{(x+k)^2}\right) & se\ |x|>k\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x-k)^2}-\frac{1}{(x+k)^2}\right) & se\ |x|<k\end{cases}$$

A meno delle costanti moltiplicative (basta assegnare a esse un valore unitario), otteniamo la seguente funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-k)^2}-\frac{1}{(x+k)^2} & se\ |x|>k\\ -\frac{1}{(x-k)^2}-\frac{1}{(x+k)^2} & se\ |x|<k\end{cases}$$

il cui grafico è indicato in figura 3.

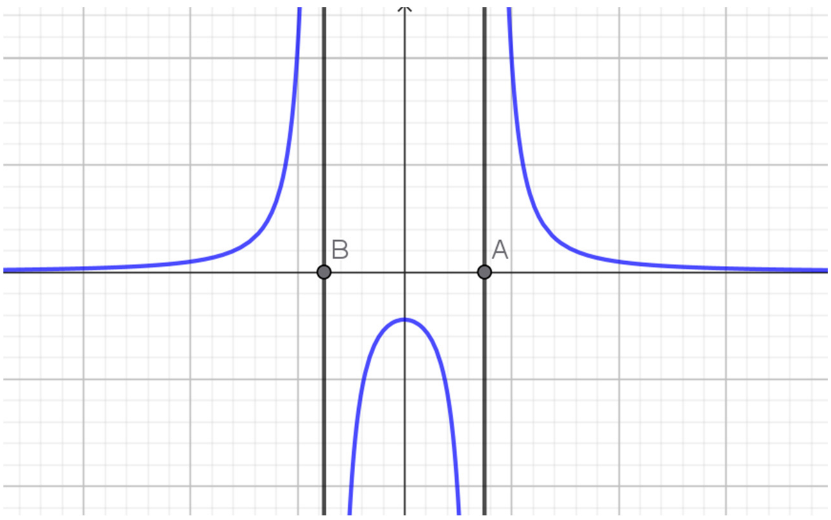

figura 3

Non esiste un punto sulla retta *r* dove il campo sia nullo, come si vede anche con un calcolo, osservando che l'equazione $E(x)=0$ non ha soluzioni.

Il campo elettrico tende a zero al tendere all'infinito della distanza dalle cariche generatrici.

Il campo elettrico tende all'infinito quando ci si avvicina al punto *A* oppure a punto *B*.

Punto b)

- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB. Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x.

Consideriamo un punto P sull'asse y. Indicata con y la distanza OP, si ha

$$AP = BP = \sqrt{y^2 + k^2}$$

Il campo elettrico nel punto P sarà pertanto un vettore parallelo all'asse delle ascisse e con verso opposto all'asse delle x (figura 4).

I due campi elettrici hanno lo stesso modulo. Pertanto, la risultante delle due componenti (parallele all'asse x) sarà

$$E = 2E_1 \cos\alpha = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\frac{k}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{k}{r^3} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{k}{\sqrt{(y^2+k^2)^3}}$$

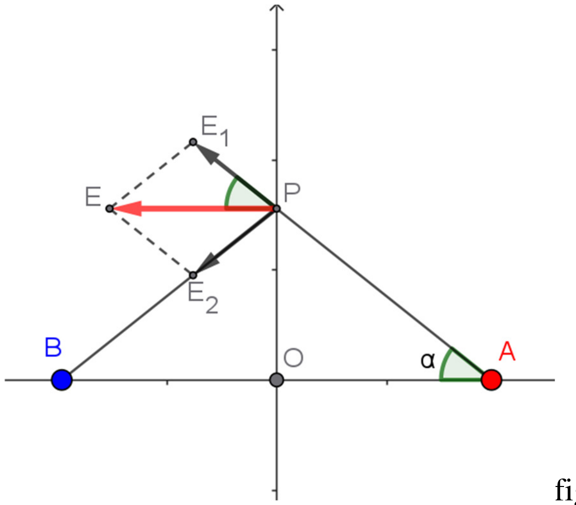

figura 4

Lasciando da parte la costante $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}$ (la consideriamo unitaria, ma con la sua unità di misura) possiamo quindi studiare la funzione

$$c(y) = \frac{k}{\sqrt{(y^2+k^2)^3}}$$

che fornisce l'intensità (in valore assoluto) del campo elettrico in un punto P dell'asse y.

Poiché il testo chiede di indicare con x la distanza PO, la funzione da studiare diventa:

$$c(x) = \frac{k}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}} = k(x^2+k^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

definita per ogni x reale, pari, sempre positiva e avente un massimo per $x = 0$.

La derivata prima è data da

$$c'(x) = k\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = \frac{-3kx}{\sqrt{(x^2+k^2)^5}}.$$

La derivata prima si annulla per $x = 0$ ed è positiva per $x < 0$. Pertanto $x = 0$ è un punto di massimo relativo (e assoluto) per la funzione.

Ovviamente la funzione è decrescente per $x > 0$ e tende a 0 per x tendente all'infinito.

Si noti che per determinare il punto di massimo e la decrescenza della funzione per $x \geq 0$ non serve la derivata, perché $c(x)$ è massima dove il denominatore $x^2 + k^2$ è minimo, il che si ha per $x = 0$.

Il grafico della funzione $c(x)$, che ci dà il modulo del campo elettrico in un punto dell'asse y, è indicato nella figura 5.

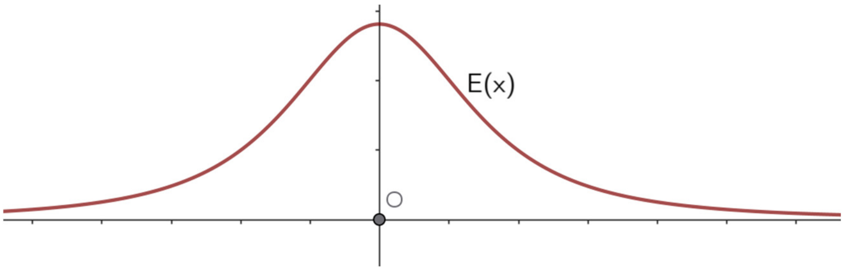

figura 5

Punto c)

- Fissati i parametri reali positivi h e k, studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

La funzione parametrica assegnata:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}}$$

è del tutto affine alla funzione studiata nel punto precedente (in cui però si aveva $h = k$).
La funzione $f(x)$ è definita per ogni x reale, pari, sempre positiva (per ipotesi, $h > 0$) e avente un massimo relativo (e assoluto) per $x = 0$.

La derivata prima è data da

$$f'(x) = -\frac{3hx}{\sqrt{(x^2 + k^2)^5}}$$

Poiché $h > 0$, la $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo (e assoluto) che vale (figura 6)

$$f(0) = \frac{h}{k^3}.$$

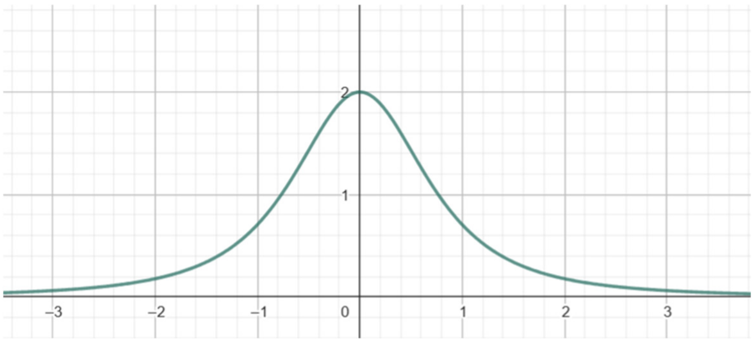

figura 6

Scriviamo la derivata prima della funzione in forma di prodotto

$$f'(x) = -\frac{3hx}{\sqrt{(x^2+k^2)^5}} = -3hx(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Pertanto, eseguendo una serie di calcoli, si ha:

$$f''(x) = -3h\left((x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}} + x \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)2x(x^2+k^2)^{-\frac{7}{2}}\right)$$

$$f''(x) = -3h(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}}(1-5x^2(x^2+k^2)^{-1})$$

$$f''(x) = -3h(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}}\left(1-\frac{5x^2}{x^2+k^2}\right)$$

$$f''(x) = -3h(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{x^2+k^2-5x^2}{x^2+k^2}\right)$$

e si trova finalmente:

$$f''(x) = \frac{3h(4x^2-k^2)}{(x^2+k^2)\sqrt{(x^2+k^2)^5}}$$

Il segno della derivata seconda dipende soltanto dal segno del binomio $4x^2-k^2$.
La $f''(x)=0$ per

$$4x^2-k^2=0$$

ossia se

$$x = \pm\frac{|k|}{2}$$

ossia, essendo per ipotesi $k>0$,

$$x = \pm\frac{k}{2},$$

che sono le ascisse dei punti di flesso.
Il segno della derivata seconda è descritto nello schema seguente (figura 7).

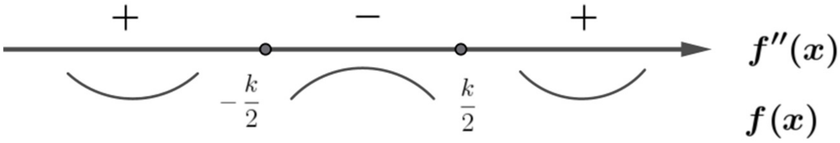

figura 7

Quindi $f(x)$, nell'ipotesi che h, k siano positivi, è convessa per valori esterni all'intervallo delle radici del binomio $4x^2-k^2$ ed è concava altrimenti. Osserviamo che poiché $f(x)$ è una funzione pari, i due flessi sono simmetrici rispetto all'asse *y*.

Punto d)

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f.
Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}}.$$

La funzione

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

è una primitiva di $f(x)$ se

$$g'(x) = f(x)$$

ossia

$$\frac{-2abx^2}{(x^2 + k^2)^{a+1}} + \frac{b}{(x^2 + k^2)^a} = \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}}$$

$$\frac{-2abx^2 + b(x^2 + k^2)}{(x^2 + k^2)^{a+1}} = \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}}$$

$$\frac{-2abx^2 + bx^2 + bk^2}{(x^2 + k^2)^{a+1}} = \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}}$$

$$\frac{b(1 - 2a)x^2 + bk^2}{(x^2 + k^2)^{a+1}} = \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}}$$

da cui segue

$$\begin{cases} 1 - 2a = 0 \\ bk^2 = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ bk^2 = h \end{cases}$$

e in definitiva:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{h}{k^2} \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$g(x) = \frac{hx}{k^2(x^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{hx}{k^2\sqrt{x^2+k^2}}.$$

Quindi le primitive di $f(x)$ sono le funzioni

$$G(x) = g(x) + c = \frac{hx}{k^2(x^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} + c = \frac{hx}{k^2\sqrt{x^2+k^2}} + c.$$

Se $h = k^2$ si ha $b = 1$ e quindi

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}$$

ed

$$f(x) = \frac{k^2}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}}.$$

Quest'ultima funzione rappresenta una densità di probabilità nell'intervallo $[0, +\infty)$ perché si ha

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = [g(x)]_0^{+\infty} = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Pertanto si può pensare a una variabile casuale (continua), che indichiamo con *X*, definita dalla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, +\infty)$.
Ne segue che il valor medio della variabile casuale è:

$$M(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\frac{k^2}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}}dx = \frac{k^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}}dx.$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito:

$$\frac{k^2}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}}dx = \frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{k^2}{\sqrt{x^2+k^2}} + c.$$

Si ha quindi

$$M(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = -k^2\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+k^2}}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-k) = k.$$

Per il calcolo della mediana, che indichiamo con *m*, occorre risolvere la seguente equazione

$$\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$$

ossia

$$[g(x)]_0^m = \frac{1}{2}$$

che dà

$$\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}\right]_0^m = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+k^2}} = \frac{1}{2}$$

$$4m^2 = m^2 + k^2$$

e in definitiva l'equazione

$$3m^2 = k^2$$

che ha come soluzione accettabile (la mediana deve essere positiva)

$$m = \frac{k}{\sqrt{3}}.$$

In figura 8 viene illustrato il significato geometrico della media $M(X)$ e della mediana m.

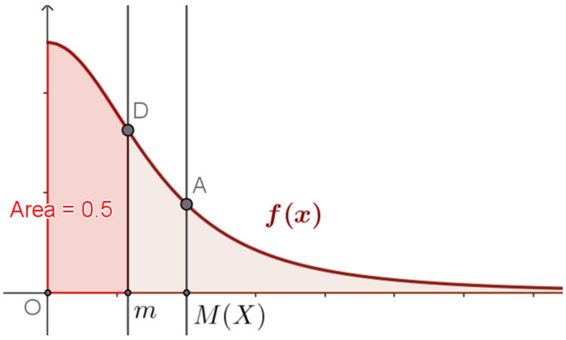

figura 8

Commento. Problema piuttosto laborioso soprattutto per la parte di matematica finale.
Argomenti: Elettrostatica. Campo elettrico. Analisi matematica; studio di funzione; integrali impropri. Variabili aleatorie continue.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto (il punto d)
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta / ☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☒ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica e Fisica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
Sono argomenti presenti nei libri di testo di Matematica e Fisica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente