

Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica e Fisica – 4 luglio 2019

QUESITO 1 - soluzione di L. Tomasi

1. Fissati i numeri reali positivi a e b , con $a \geq b$, provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(x^a + x^b) = a$$

Soluzione

Sappiamo che la funzione

$$f(x) = \log_x(x^a + x^b)$$

è definita se $x > 0$ e $x \neq 1$.

Poiché $a > b$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_x(x^a(1 + x^{b-a})) = \log_x\left(x^a\left(1 + \frac{1}{x^{a-b}}\right)\right) = \log_x x^a + \log_x\left(1 + \frac{1}{x^{a-b}}\right) = \\ &= a + \log_x\left(1 + \frac{1}{x^{a-b}}\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \log_x\left(1 + \frac{1}{x^{a-b}}\right)\right) = a.$$

Infatti, con un cambiamento di base, calcoliamo il limite della seconda parte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x\left(1 + \frac{1}{x^{a-b}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^{a-b}}\right)}{\ln x} = 0.$$

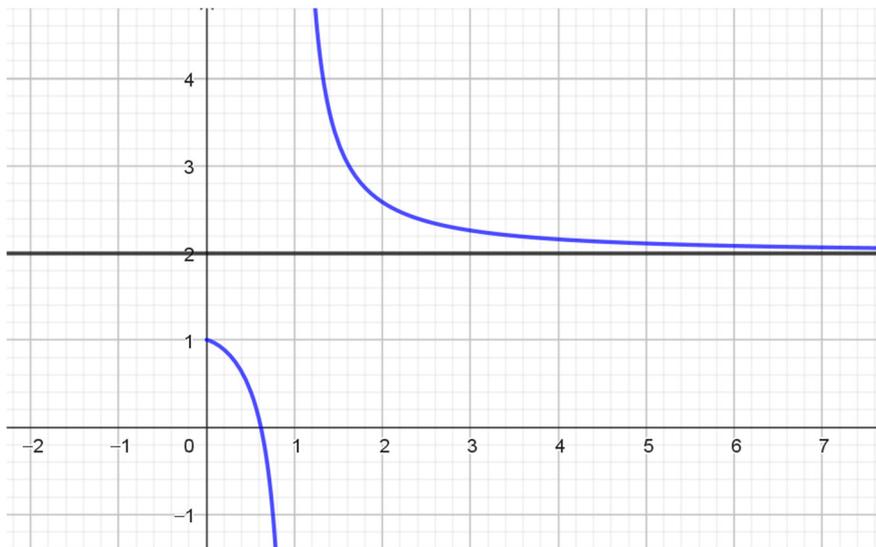


figura ($a = 2, b = 1$)

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del quesito	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì		<input checked="" type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente