

QUESITO 4 - soluzione di L. Tomasi

4. Considerati i punti $A(2, 3, 6)$, $B(6, 2, -3)$, $C(3, -6, 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA , OB , OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

Soluzione

Per verificare se i tre segmenti OA , OB , OC costituiscono tre spigoli di un cubo determiniamo la loro lunghezza. Si trova.

$$OA = OB = OC = 7.$$

Calcoliamo poi il prodotto scalare dei vettori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, a due a due. Si trova:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 0$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 2 = 0$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot 2 = 0$$

Quindi, i vettori sono a due a due ortogonali tra loro.

Il vertice del cubo opposto al vertice O si ottiene sommando i tre vettori-punto; si ottiene:

$$G = (11, -1, 5).$$

Il centro della sfera sarà pertanto il punto medio tra O e G :

$$K\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

e il raggio

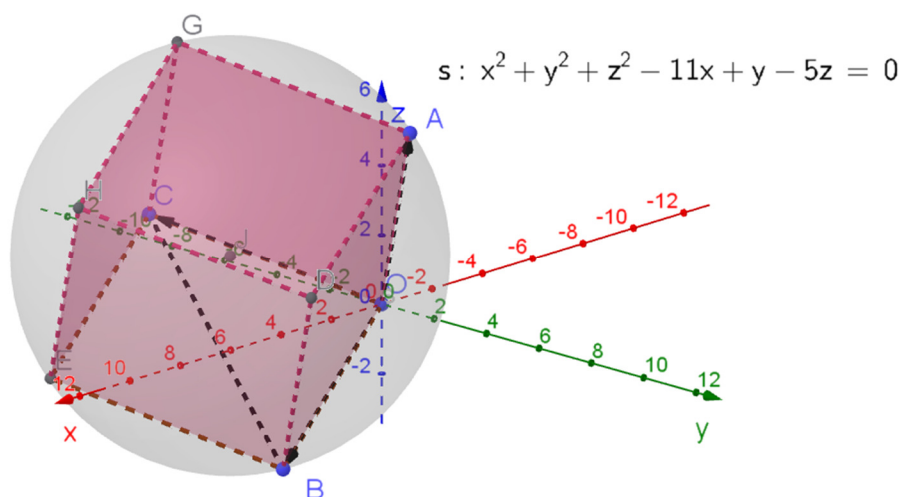
$$r = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{147}.$$

L'equazione della superficie sferica sarà pertanto (vedi figura):

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$$

ossia

$$x^2 + y^2 + z^2 - 11x + y - 5z = 0.$$



figura

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☒ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta ☒ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No	
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente	