

Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2023

QUESITO 8 - soluzione a cura di Laura Rossi

8. Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Soluzione

$$f_a(x) = x^5 - 5ax + a, \quad a > 0$$

è definita in \mathbb{R} e ivi continua e derivabile. Per il Teorema di Bolzano generalizzato ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$) la funzione ammette almeno uno zero.

$$f'_a(x) = 5x^4 - 5a, \quad a > 0$$

Dallo studio del segno della derivata prima risulta che la funzione è crescente per $x \leq -\sqrt[4]{a}$ e per $x \geq \sqrt[4]{a}$, decrescente per $-\sqrt[4]{a} \leq x \leq \sqrt[4]{a}$, quindi $x = -\sqrt[4]{a}$ è punto di massimo relativo per la funzione e il massimo vale $f(-\sqrt[4]{a}) = a + 4a\sqrt[4]{a}$ mentre $x = \sqrt[4]{a}$ è punto di minimo relativo per la funzione e il minimo vale $f(\sqrt[4]{a}) = a - 4a\sqrt[4]{a}$.

La funzione possiede 3 zeri distinti quando il massimo e il minimo relativi sono discordi ossia

$$(a + 4a\sqrt[4]{a}) \cdot (a - 4a\sqrt[4]{a}) < 0, \quad a > 0$$

risolvendo

$$a^2 - 16a^2\sqrt{a} < 0, \quad a > 0$$

$$a^2(1 - 16\sqrt{a}) < 0, \quad a > 0$$

$$1 - 16\sqrt{a} < 0$$

$$a > \frac{1}{256}.$$

Tabella di analisi del quesito (Matematica)

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta <input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente	<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> Parzialmente