Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 14 settembre 2023

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

a) Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro *n*, le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con $n \to \infty$. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni f_n, evidenziando le differenze tra i casi in cui *n* è pari da quelli in cui *n* è dispari.

b) Si assuma $n = 3$, studiare la funzione $f_3(x)$ e si tracciare un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.

c) Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ e verificare che, $\forall x > 0$, vale la disuguaglianza $f_n(x) > g(x)$, indipendentemente dal valore di n. Si consideri l'integrale

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))dx \, ,$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = t$, $t > 1$. Si calcolino $I(t)$ e il $\lim_{t\to+\infty} I(t)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

d) Calcolare il $\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2}$

e verificare che il risultato non dipende da $n \in N, n > 1$.

Soluzione

Consideriamo la famiglia di funzioni con *n* numero naturale maggiore di 1:

$$f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$$

Il dominio di queste funzioni è formato dall'insieme dei numeri reali non nulli.

Punto a)

a) Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro *n*, le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con $n \to \infty$. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni f_n, evidenziando le differenze tra i casi in cui *n* è pari da quelli in cui *n* è dispari.

La famiglia di funzioni ha per equazione

$$f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}.$$

Consideriamo due generiche curve di questa famiglia:

$$f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}.$$

$$f_m(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^m}$$

con $m > n$ e le intersechiamo. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n} \\ f_m(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^m} \end{cases}$$

e l'equazione

$$\frac{3}{x^n} = \frac{3}{x^m}$$

ossia

$$x^n = x^m$$

$$x^n(x^{m-n} - 1) = 0.$$

Si ottengono le soluzioni $x = 0$ (non accettabile) e $x = 1$ e quindi il punto $A(1,2)$, che sarà comune a tutte le curve.

Determiniamo i limiti della funzione agli estremi del dominio, distinguendo il caso in cui *n* è pari da quello in cui è dispari.

Calcoliamo i seguenti limiti da destra e da sinistra:

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x^n - 3x^{n-1} + 3}{x^n}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f_n(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x^n - 3x^{n-1} + 3}{x^n}\right) = \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \\ -\infty & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Pertanto l'asse delle ordinate è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f_n(x) = \lim_{x\to \pm\infty}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}\right) = 2$$

Quindi la retta di equazione $y = 2$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra per il grafico della funzione.

Calcoliamo la derivata prima: si ottiene

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{3n}{x^{n+1}} = 3\left(\frac{x^{n-1} - n}{x^{n+1}}\right)$$

di cui studiamo il segno, distinguendo il caso in cui n è dispari da quello in cui n è pari.

Se <u>n è dispari</u>, essendo $n+1$ pari, il denominatore è positivo nel dominio; quindi il segno della derivata prima dipende soltanto dal segno della funzione polinomiale $x^{n-1}-n$. Risolviamo l'equazione binomiale (dove $n-1$ è pari)

$$x^{n-1}-n=0$$

e otteniamo le soluzioni reali e distinte: $x=\pm\sqrt[n-1]{n}$. Pertanto il segno della derivata prima e l'andamento della funzione, per n dispari, è dato dal seguente schema:

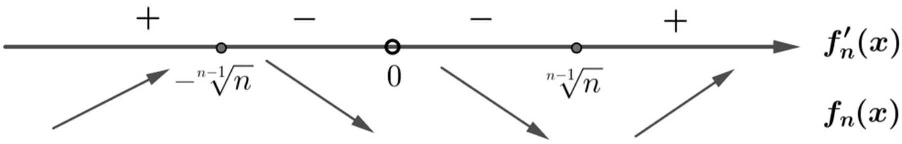

figura 1

Per n dispari, la funzione è crescente per $x<.\sqrt[n-1]{n}$ e per $x>\sqrt[n-1]{n}$ e decrescente altrove. Il punto di ascissa $x=-\sqrt[n-1]{n}$ è un punto di massimo relativo e il punto $x=\sqrt[n-1]{n}$ è un punto di minimo relativo.

Possiamo quindi tracciare il grafico di figura 3 (n dispari).

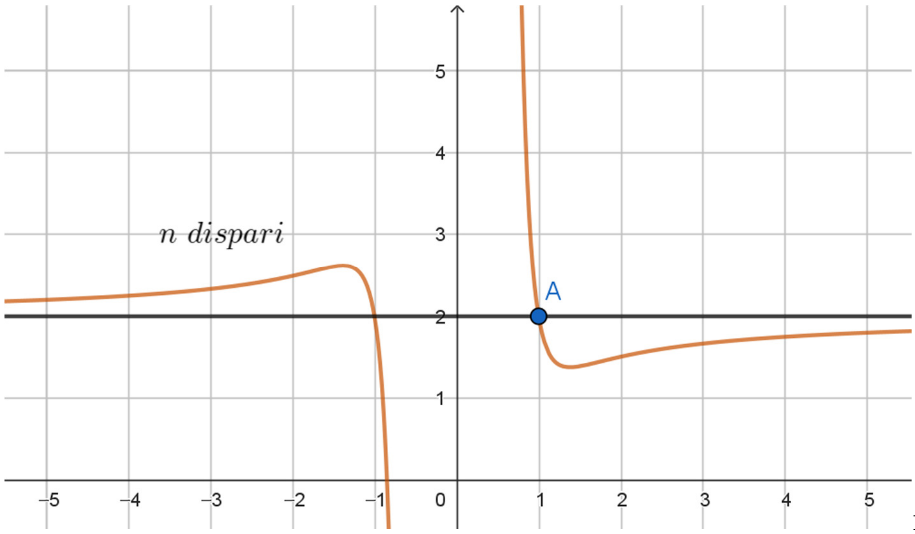

figura 3

Se <u>n è pari</u>, essendo $n+1$ dispari, il segno del denominatore deve essere discusso assieme al segno del denominatore; quindi il segno della derivata prima dipende sia dal denominatore che dal numeratore, che è $x^{n-1}-n$. Risolviamo l'equazione binomiale (dove $n-1$ è dispari)

$$x^{n-1}-n=0$$

e otteniamo l'unica soluzione reale: $x=\sqrt[n-1]{n}$. Pertanto il segno della derivata prima e l'andamento della funzione, per n pari, è dato dal seguente schema:

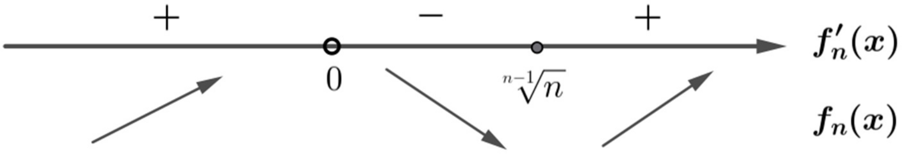

figura 2

Per n pari, la funzione è crescente per $x < 0$ e per $x > \sqrt[n-1]{n}$ e decrescente altrove. Il punto di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$ è un punto di minimo relativo (e assoluto.

Possiamo quindi tracciare il grafico di figura 4 (n pari).

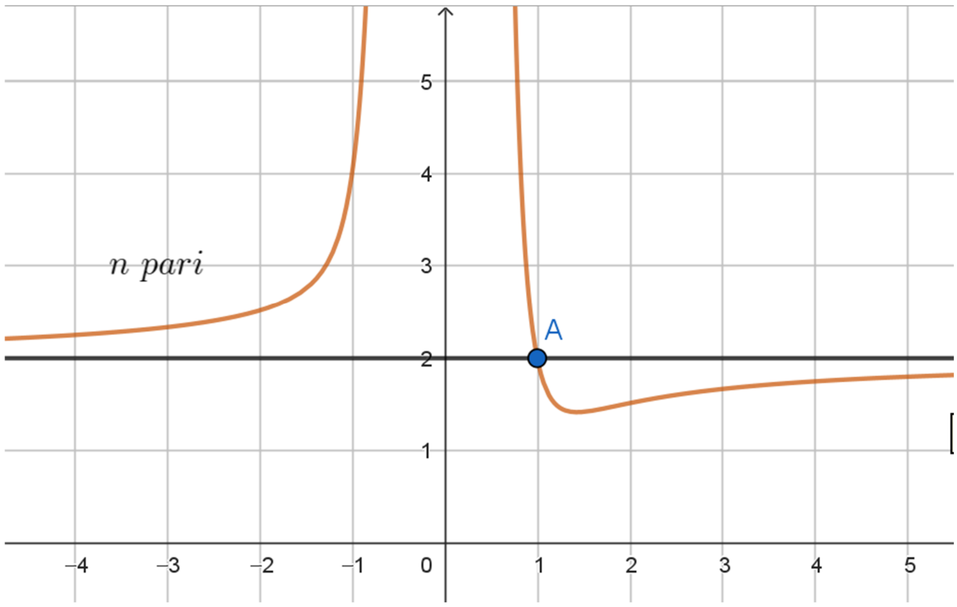

figura 4

Passiamo ora allo studio della derivata seconda di $f_n(x)$.
La derivata seconda è:

$$f_n''(x) = 3\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{n(n+1)}{x^{n+2}}\right) = 3\left(\frac{-2x^{n-1} + n(n+1)}{x^{n+2}}\right).$$

Se n è dispari, anche $n + 2$ è dispari ed occorre discutere sia il segno del numeratore che del denominatore. La $f_n''(x) = 0$ per $-2x^{n-1} + n(n+1) = 0$, ossia se

$$x^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Poiché $n - 1$ è pari si hanno due soluzioni reali e distinte $x = \pm\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$, che sono le ascisse dei punti di flesso.

La derivata seconda è positiva per $x < -\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$ e nell'intervallo 0<$x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$. In tali intervalli la curva è convessa e concava altrimenti.
Il segno della derivata seconda, con n dispari, è dato dal seguente schema.

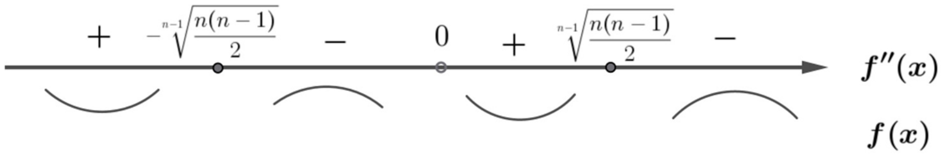

figura 5

Se n è pari, anche $n+2$ è pari e il segno della $f_n''(x)$ dipende solo dal segno del numeratore. La $f_n''(x) = 0$ per $-2x^{n-1} + n(n+1) = 0$, ossia se

$$x^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Poiché $n-1$ è dispari, questa equazione ha una sola soluzione reale $x = \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$, che è l'ascissa (positiva) dell'unico flesso.

La derivata seconda è negativa $x > \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$. In tale intervallo la curva è concava ed è concava altrimenti.

Il segno della derivata seconda, con n dispari, è dato dal seguente schema.

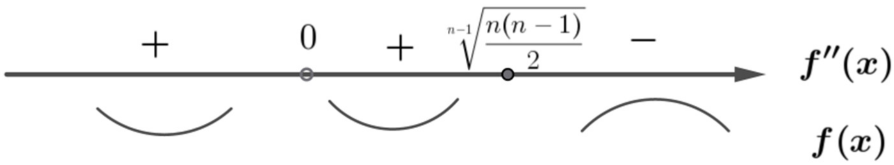

figura 6

Punto b)

b) Si assuma $n = 3$, studiare la funzione $f_3(x)$ e si tracciare un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.

Per $n = \_3$ si ottiene la funzione

$$f_3(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}.$$

In base al punto precedente sappiamo che i punti estremanti hanno ascissa $x = -\sqrt{3}$ (punto di massimo relativo) e $x = \sqrt{3}$ (punto di minimo relativo).

Il massimo relativo vale

$$f_3(-\sqrt{3}) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

e il minimo relativo

$$f_3(\sqrt{3}) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

I punti di flesso hanno per ascisse $x = \pm\sqrt{6}$.

I flessi hanno coordinate

$$F_{1,2}\left(\pm\sqrt{6}, 2 \mp \frac{5}{12}\sqrt{6}\right).$$

Si noti che il grafico della $f_3(x)$ è simmetrico rispetto al punto $C(0,2)$, come si può dimostrare tramite una traslazione di vettore $\vec{v}(0,-2)$.

Il grafico della funzione $f_3(x)$ è riportato nella figura 7.

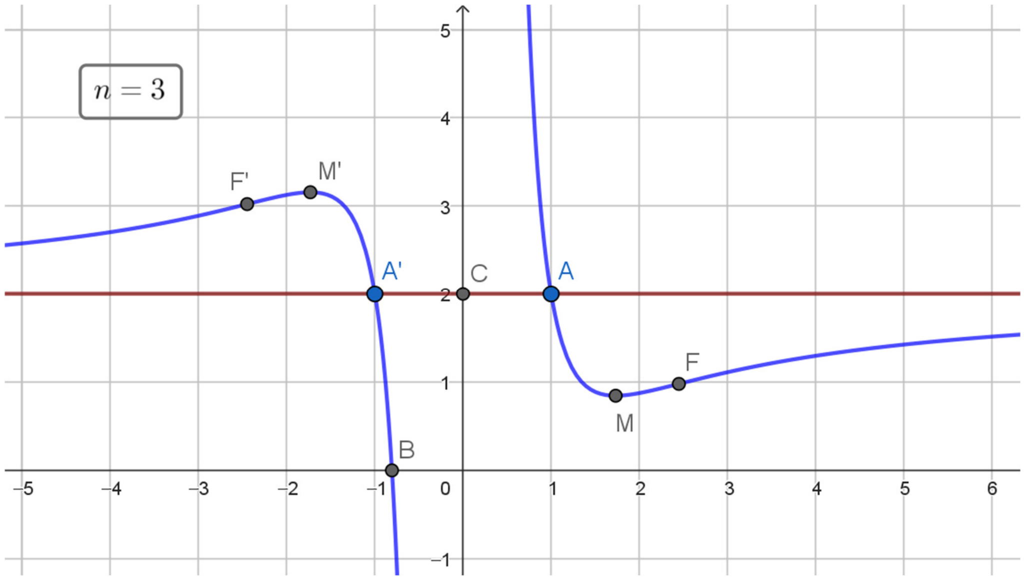

figura 7

Consideriamo l'intervallo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. In tale intervallo la funzione continua e decrescente (in senso stretto). Inoltre si ha $f_3(-1) = 2$ ed $f_3\left(-\frac{1}{2}\right) = -16$. Pertanto in questo intervallo la funzione ammette uno ed un solo zero, che vale circa $x \approx -0{,}806$.

Intersechiamo il grafico della funzione con il fascio di rette $y = k$.

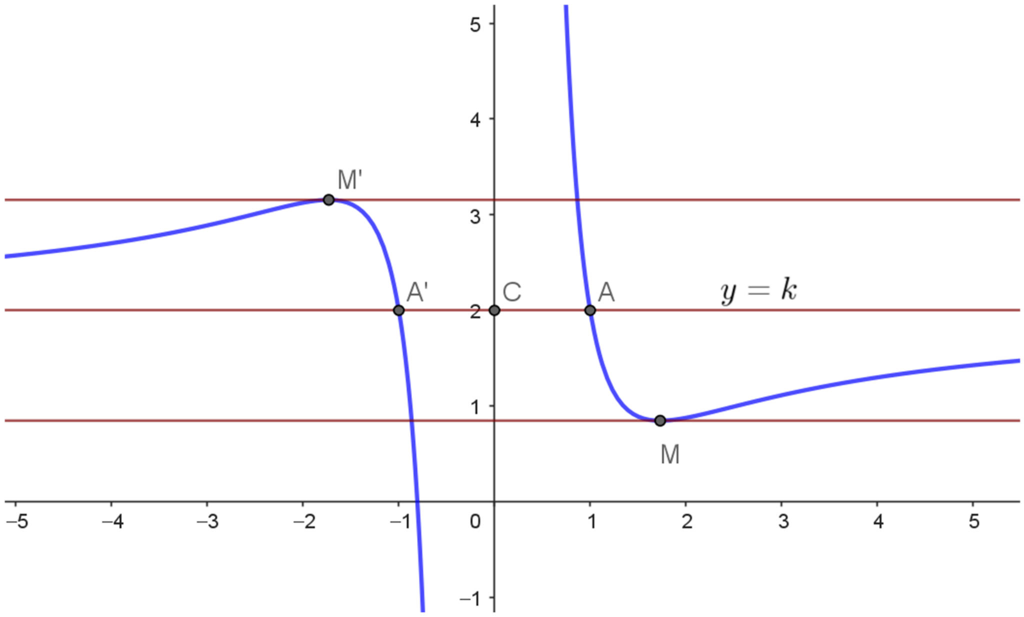

figura 8

Graficamente (figura 8) si conclude:

se $k < 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$	1 sola soluzione, negativa
se $k = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$	3 soluzioni, una negativa e una (doppia) positiva
se $2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} < k < 2$	3 soluzioni distinte, due positive
se $k = 2$	2 soluzioni, una positiva
se $2 < k < 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$	3 soluzioni distinte, una positiva

se $k = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 3 soluzioni, due coincidenti, una positiva

se $k > 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1 sola soluzione, positiva.

Punto c)

c) Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ e verificare che, $\forall x > 0$, vale la disuguaglianza $f_n(x) > g(x)$, indipendentemente dal valore di n. Si consideri l'integrale

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))dx\ ,$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = t$, $t > 1$. Si calcolino $I(t)$ e il $\lim_{t\to+\infty} I(t)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

Consideriamo la funzione

$$g(x) = 2 - \frac{3}{x}$$

Il grafico di questa funzione è un'iperbole equilatera che ha per asintoti l'asse delle y e la retta di equazione $y = 2$, e quindi con centro di simmetria nel punto $C(0,2)$. L'equazione dell'iperbole si può scrivere nella forma $x(y-2) = -3$.

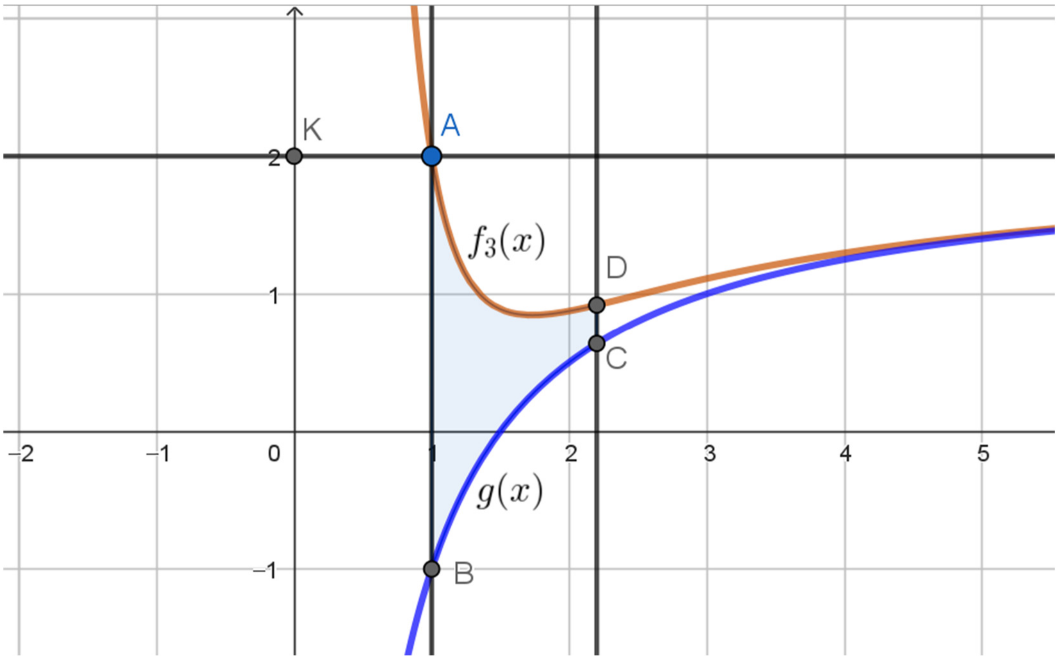

figura 9

Per $x > 0$ e il parametro $t > 1$, consideriamo l'integrale seguente (che rappresenta l'area indicata nella figura 9 compresa tra le due curve e le due rette di equazioni $x = 1$ e $x = t$):

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))dx = \int_1^t \left(\frac{3}{x^n}\right) dx = 3\int_1^t x^{-n}dx =$$

$$= 3\left[\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\right]_1^t = \frac{3}{1-n}\left(\frac{1}{t^{n-1}} - 1\right).$$

Calcoliamo ora il limite di $I(t)$ con $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{3}{1-n}\left(\frac{1}{t^{n-1}} - 1\right) = \frac{3}{n-1}.$$

Questo risultato rappresenta il limite dell'area compresa tra le due curve. Per esempio, nel caso $n = 3$, il limite vale 3/2.

Punto d)

d) Calcolare il $\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2}$

e verificare che il risultato non dipende da $n \in N, n > 1$.

Calcoliamo ora il seguente limite:

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}}{-\frac{3}{x}} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\frac{-x^{n-1}+1}{x^n}}{-\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}} = 1\,.$$

Commento sintetico

Argomento prevalente: analisi matematica.

Molto laborioso e pieno di calcoli anche perché occorreva distinguere due casi. Si richiede troppo…

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No	
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì, molto	☐ No		☐ Parzialmente	