Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 12 settembre 2023

PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi

Si considerino le famiglie di funzioni $f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$ e $g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ con a parametro reale positivo.

a) Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f e γ_g delle funzioni $f_a(x)$ e $g_a(x)$ evidenziando simmetrie, estremi e flessi.

b) Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g, aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQQ'P'$ vale e^{-1}.

D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.

c) Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in $\mathbb{R}$ e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.

d) Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita R delimitata da γ, dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area di R può essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

Soluzione

Consideriamo le famiglie di funzioni:

$$f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) \quad e \quad g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$$

entrambe definite in $\mathbb{R}$, con $a > 0$.

Osservazione. Anche se non occorreva sapere queste definizioni per risolvere il problema, si tratta delle funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico, indicate come segue:

$$f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) = \sinh(ax)$$

$$g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) = \cosh(ax)\,.$$

Punto a)

a) Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f e γ_g delle funzioni $f_a(x)$ e $g_a(x)$ evidenziando simmetrie, estremi e flessi.

La funzione $f_a(x)$ interseca l'asse delle ascisse nell'origine ed essendo $a > 0$, è positiva per $x > 0$.

È una funzione dispari. Infatti si ha:

$$f_a(-x) = \frac{1}{2}(e^{-ax} - e^{ax}) = -\frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) = -f_a(x).$$

Si ha $\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$, ma non possiede asintoto obliquo.

La derivata prima è:

$$f_a'(x) = \frac{1}{2}(ae^{ax} + ae^{-ax}) = ag_a(x).$$

Pertanto $f_a'(x) \geq 0$ se e solo se $g_a(x) \geq 0$, che è vera per ogni *x*. Quindi la funzione $f_a(x)$ è sempre crescente (in senso stretto) e non ha punti estremanti.

Si ha inoltre

$$f_a''(x) = ag_a{}'(x) = a\frac{1}{2}(ae^{ax} - ae^{-ax}) = a^2\, f_a(x).$$

Quindi la derivata seconda si annulla per $x = 0$ (punto di flesso ascendente) e la funzione $f_a(x)$ è convessa per $x > 0$.

La funzione $g_a(x)$ interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0,1)$ ed è positiva per ogni *x*.

È una funzione pari. Infatti si ha:

$$g_a(-x) = \frac{1}{2}(e^{-ax} + e^{ax}) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) = g_a(x).$$

Si ha $\lim_{x \to +\infty} g_a(x) = +\infty$, ma non possiede asintoto obliqui.

La derivata prima è:

$$g_a'(x) = \frac{1}{2}(ae^{ax} - ae^{-ax}) = af_a(x).$$

Pertanto $g_a'(x) \geq 0$ se e solo se $f_a(x) \geq 0$, che è vera per $x > 0$. Quindi la funzione $g_a(x)$ è crescente (in senso stretto) per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$; quindi ha un minimo relativo (e assoluto) per $x = 0$, che vale 1.

Si ha inoltre

$$g_a''(x) = af_a{}'(x) = a\frac{1}{2}(ae^{ax} + ae^{-ax}) = a^2\, g_a(x).$$

Quindi la derivata seconda è sempre positiva e la funzione $g_a(x)$ è convessa per ogni x.

Nell figura 1 riportiamo i grafici di $f_a(x)$ e di $g_a(x)$, con $a = 0.8$.

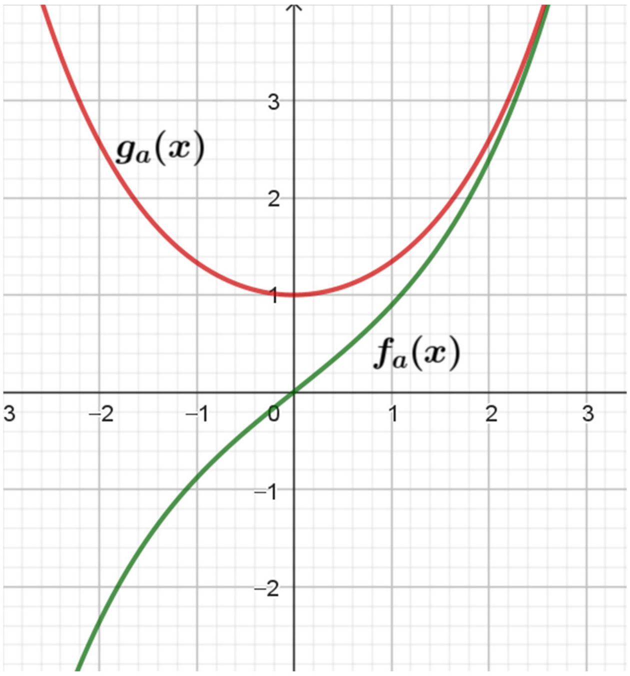

figura 1

Punto b)

b) Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g, aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQQ'P'$ vale e^{-1} .

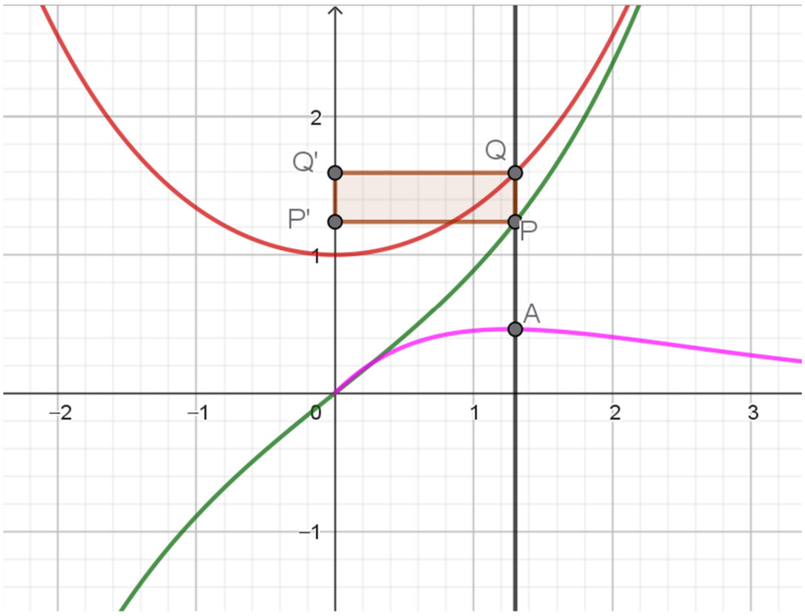

figura 2

Osserviamo che si ha ovviamente $g_a(x) > f_a(x)$.
Pertanto si ha

$$PQ = g_a(x) - f_a(x) = ae^{-ax}$$

e l'area del rettangolo $P'PQQ'$ (con $x > 0$)

$$S(x) = axe^{-ax}.$$

La derivata della funzione area è:

$$S'(x) = ae^{-ax} - axr^{-ax} = ae^{-ax}(1 - ax).$$

Questa derivata, e la funzione è crescente, per $0 < x < \frac{1}{a}$. Quindi il massimo dell'area si ha per $x = 1/a$ e vale

$$S_{max} = S\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{e}.$$

Poiché deve essere $S_{max} = 1$, si ottiene finalmente $a = 1$.
Pertanto le funzioni diventano:

$$f_1(x) = f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

$$g_1(x) = g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

Punto c)

D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.

c) Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in $\mathbb{R}$ e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.

Indicata con $X = g(x)$ e $Y = f(x)$ si ha:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

che è un'iperbole equilatera.
Si ha infatti:

$$g^2(x) - f^2(x) = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1\,.$$

[Osservazione. Questa identità si esprime anche nel seguente modo $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$].

Risolviamo ora le seguenti disequazioni, cercando un numero intero che le soddisfi:

$$50 \leq g(x) - f(x) \leq 100.$$

Si ottiene

$$50 \leq e^{-x} \leq 100$$

ossia

$$50 \leq \frac{1}{e^x} \leq 100$$

$$\frac{1}{100} < e^x < \frac{1}{50}$$

e passando ai logaritmi naturali)

$$\ln\left(\frac{1}{100}\right) < x < \ln\left(\frac{1}{50}\right)$$

Approssimando si ottiene circa:

$$-4{,}6 < x < -3{,}9$$

disequazioni che hanno come soluzione il numero intero $k = -4$.

Tra le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ solo la $f(x) = \sinh x$ è invertibile, perché è monotona crescente (in senso stretto) in $\mathbb{R}$ e quindi è iniettiva.
Per ricavare l'espressione della funzione inversa occorre prima risolvere l'equazione

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

rispetto alla variabile x.
Si ottiene quindi

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$

ossia

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Pertanto si ha $\frac{\Delta}{4} = 1 + y^2$ e le soluzioni

$$e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}\,,$$

dove solo quella positiva è accettabile. Quindi si ha

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2}\,,$$

e

$$x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right).$$

Chiamando x la variabile indipendente (e y quella dipendente) si ottiene la funzione

$$y = f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

che ha come dominio (e immagine del dominio) $\mathbb{R}$, funzione crescente in senso stretto.
[Osservazione: questa funzione viene chiamata $\sinh^{-1} x$ o anche SettSh x].
Il suo grafico, ovviamente, è il simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (figura 3).

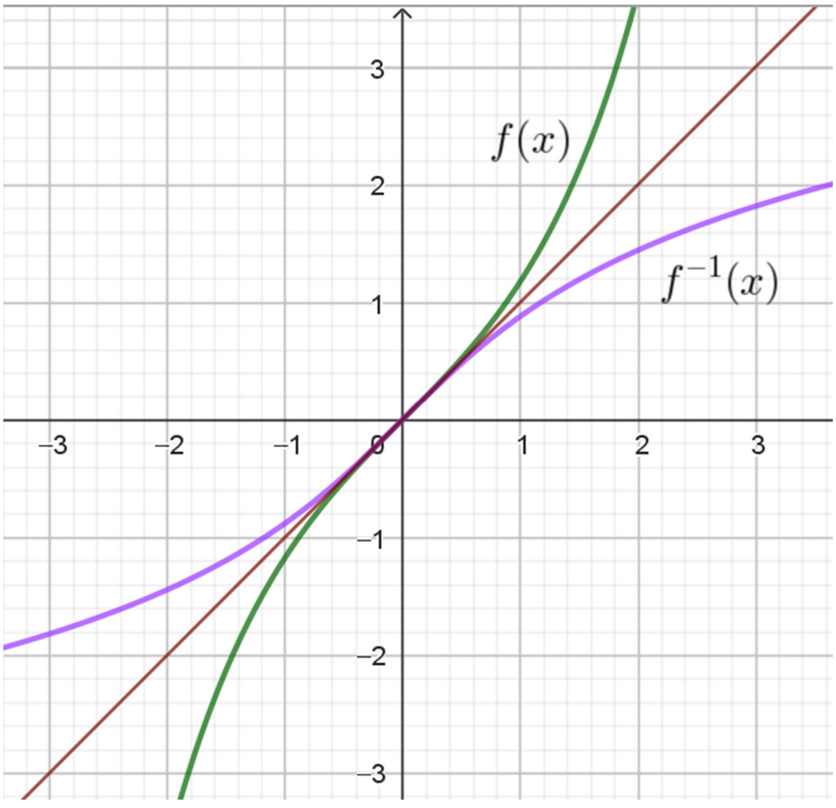

figura 3

Punto d)

d) Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita R delimitata da γ, dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area di R può essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

La parabola deve avere vertice nel punto $V(0,1)$ e retta tangente, per $x = 1$, di coefficiente angolare $m = -2$. Pertanto deve essere $P(x) = ax^2 + c$, con

$$\begin{cases} c = 1 \\ P'(1) = -2 \end{cases}$$

Ne segue che

$$\begin{cases} a = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

e quindi l'equazione $y = -x^2 + 1$.
L'area della regione R è quindi data da

$$Area(R) = \int_{-1}^{1} (g(x) - P(x))dx = 2\int_{0}^{1} (\cosh x + x^2 - 1)dx =$$

$$= 2\left[\sinh x + \frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{e^2 - 1}{e} - \frac{4}{3} \approx 1{,}017$$

L'area del triangolo isoscele *CBV* è 1. Quindi l'area del triangolo *CBV* è una buona approssimazione dell'area della regione *R*.

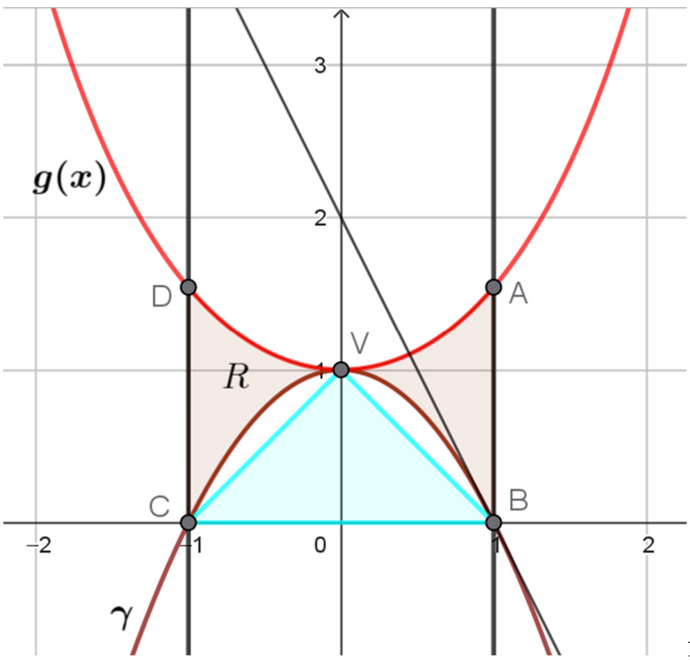

figura 4

Commento. Argomento prevalente: analisi matematica ("calculus"). Si poteva svolgere anche senza conoscere le funzioni iperboliche (seno e coseno iperbolici).

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		