

**Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 14 settembre 2023**

**QUESITO 5 - soluzione di L. Tomasi**

5. Determina l'equazione della funzione dispari che ha un solo flesso a tangente orizzontale e la cui derivata seconda è  $f'' = -10x^3 + 12x$ .

**Soluzione**

La derivata seconda della funzione da determinare è la funzione polinomiale

$$f''(x) = -10x^3 + 12x = -2x(5x^2 - 6).$$

I punti di flesso, che si ottengono risolvendo l'equazione  $f''(x) = 0$ , hanno per ascisse  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$ .

Calcoliamo una primitiva generica di questa funzione, ottenendo

$$f'(x) = \int (-10x^3 + 12x)dx = -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2 + c_1.$$

Poiché deve trattarsi di un unico flesso a tangente orizzontale imponiamo  $f'(0) = 0$  e si ha  $c_1 = 0$ .  
Calcoliamo

$$f' \left( \pm\sqrt{\frac{6}{5}} \right) = \frac{18}{5} + c_1.$$

Se questa derivata fosse nulla, con  $c_1 = -\frac{18}{5}$ , si avrebbero allora due flessi con tangente orizzontale, contro l'ipotesi. Pertanto  $c_1 = 0$ .

Ne segue

$$f'(x) = -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2.$$

Pertanto si ha

$$f(x) = \int \left( -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2 \right) dx = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 + c_2.$$

Per ipotesi, la funzione  $f(x)$  deve essere dispari. Quindi si ha:

$$f(-x) = -f(x)$$

ossia

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 + c_2 &= -\left( -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 + c_2 \right) \\ \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 + c_2 &= \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 - c_2 \end{aligned}$$

da cui segue

$$2c_2 = 0$$

e infine  $c_2 = 0$ .

Quindi l'equazione della funzione è la seguente:

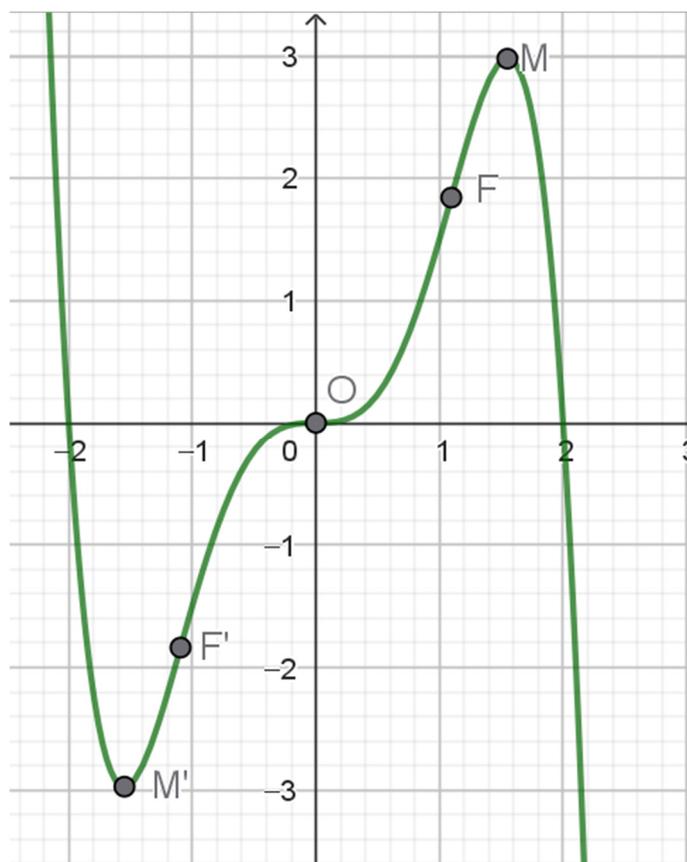
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3.$$

La funzione interseca l'asse delle ascisse nei punti  $x = 0$  e  $x = \pm 2$ .

Il grafico ha come centro di simmetria l'origine degli assi ed estremi nei punti di ascissa  $x = \pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}$ .

I flessi sono i punti già individuati all'inizio.

Anche se non era richiesto, riportiamo infine il grafico della funzione.



Argomento: Analisi matematica, flessi e integrali indefiniti.

#### Tabella di analisi del quesito

<b>Livello di difficoltà stimato</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
<b>Formulazione del problema</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
<b>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>L'argomento è presente nel QdR di Matematica</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
<b>È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?</b>	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
<b>Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
<b>Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente