

Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 14 settembre 2023

QUESITO 7 - soluzione di L. Tomasi

7. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x|x+1|}{x^3-x}$ e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.

Soluzione

Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{x|x+1|}{x^3-x} = \frac{x|x+1|}{x(x^2-1)}$$

è dato dall'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.

Supposto $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x^2-1} = \frac{|x+1|}{(x+1)(x-1)}$$

Da quest'ultima equazione, se $x > -1$, si ha

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

il cui grafico è formato da due rami di un'iperbole equilatera di asintoti l'asse delle ascisse (a destra) e la retta di equazione $x = 1$. Il punto $x = 1$, che non appartiene al dominio della funzione, è quindi un punto di discontinuità di solito detto di "seconda specie". Di ha infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Inoltre il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile per la funzione. Si ha infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1.$$

Esaminiamo ora la funzione per $x < -1$; si ha

$$f(x) = \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x-1}$$

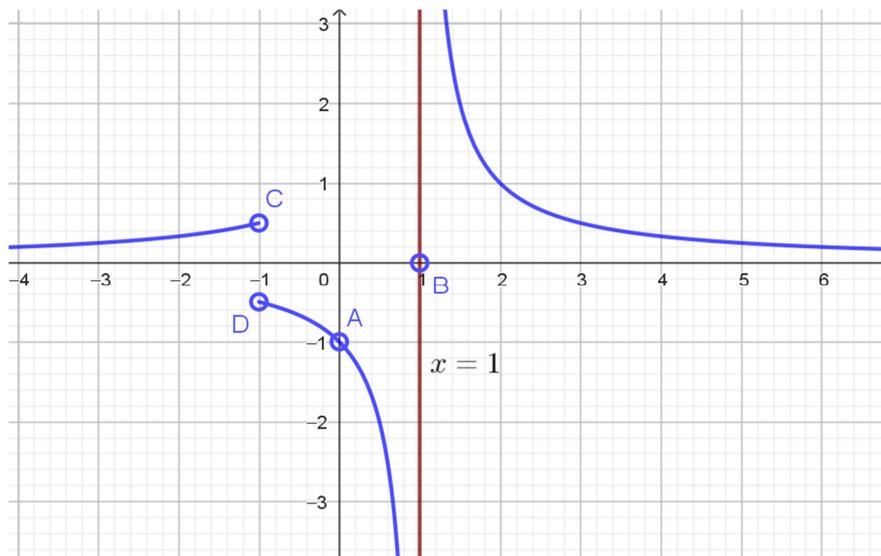
il cui grafico è formato da un ramo di un'iperbole equilatera di asintoti l'asse delle ascisse (a sinistra). Il punto $x = -1$, che non appartiene al dominio della funzione, è quindi un punto di discontinuità di solito detto di "prima specie". Si ha infatti:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Riportiamo il grafico della funzione qui di seguito.



figura

Argomento: analisi matematica; punti di discontinuità.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del quesito	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente