Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 12 settembre 2024

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

Sia data la seguente funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + c$$

a) Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali *a* e *c* $(a \neq 0)$, il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.

b) Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.

c) Si disegni quindi il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$, e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = -2$.

d) Si dimostri infine che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione $f(x)$ la traslazione di vettore $\vec{v}\,(\alpha, \beta)$. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, affinché la funzione traslata risulti dispari.

Soluzione

Punto a)

a) Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali *a* e *c* $(a \neq 0)$, il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.

La famiglia di funzioni polinomiali cubiche ha per equazione

$$f(x) = x^3 + ax^2 + c\,.$$

Queste funzioni hanno tutte per dominio $\mathbb{R}$, sono derivabili (e quindi continue) nel dominio. Il limite di tutte le funzioni per $x \to +\infty$ è $+\infty$ e per $x \to -\infty$ è $-\infty$, ma non hanno asintoti di nessun tipo.

La derivata prima è

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)\,.$$

La derivata prima si annulla in $x = 0$ e per $x = -\frac{2a}{3}$, due valori distinti perché per ipotesi $a \neq 0$.

La derivata prima è positiva esternamente all'intervallo formato da queste due radici e pertanto la funzione $f(x)$ è crescente in tali intervalli (figura 1).

Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = -\frac{2a}{3}$ è un punto di minimo relativo.

Il massimo relativo vale $f(0) = c$ e il minimo relativo vale

$$f\left(-\frac{2a}{3}\right) = -\frac{8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + c = \frac{4a^3}{27} + c.$$

La derivata seconda è:

$$f''(x) = 6x + 2a.$$

Il punto di ascissa $x = -\frac{a}{3}$ è il punto di flesso (ascendente).

Per $x > -\frac{a}{3}$ la funzione è convessa e per $x < -\frac{a}{3}$ è concava.
Il flesso ha coordinate

$$\left(-\frac{a}{3}, \frac{2a^3}{27} + c\right).$$

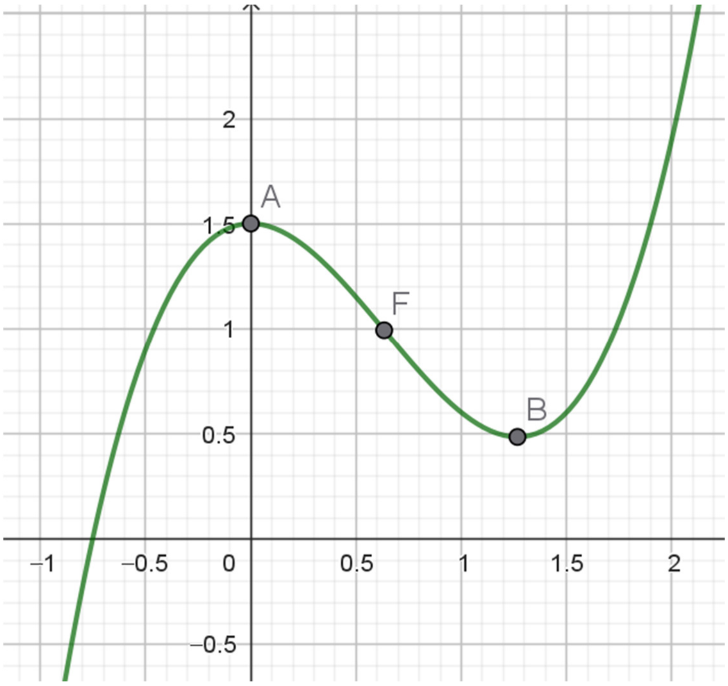

figura 1

Il punto medio tra il massimo relativo e il minimo relativo è

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0 - \dfrac{2a}{3}}{2} = -\dfrac{a}{3} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{c + \dfrac{4a^3}{27} + c}{2} = \dfrac{2a^3}{27} + c \end{cases}$$

che sono le coordinate del flesso.

Punto b)

b) Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.

Dobbiamo porre

$$\begin{cases} -\dfrac{2a}{3} = -2 \\ \dfrac{2a^3}{27} + c = 6 \end{cases}$$

Si trovano i seguenti valori:

$$\begin{cases} a = 3 \\ c = 4 \end{cases}$$

Si ottiene pertanto la funzione

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4\,.$$

Punto c)

c) Si disegni quindi il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$, e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = -2$.

In base a quanto trovato nei punti precedenti possiamo disegnare immediatamente il grafico della funzione $f(x)$; vedi figura 2.

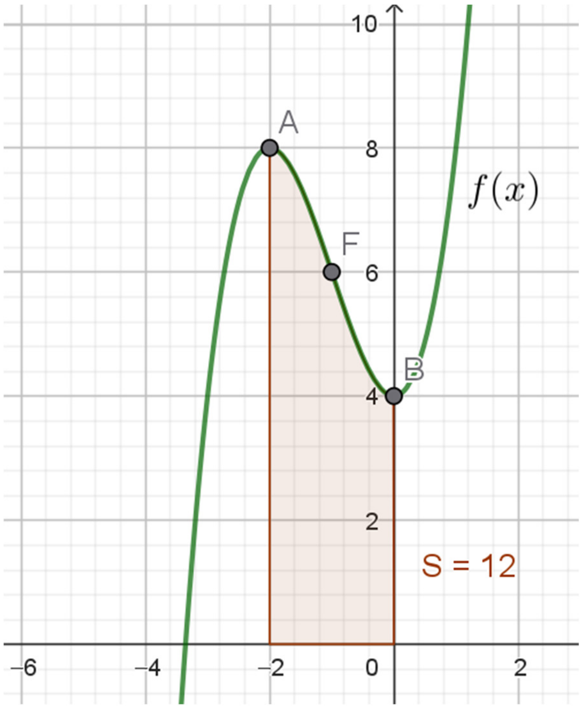

figura 2

Per determinare l'area richiesta occorre calcolare il seguente integrale definito (figura 2):

$$S = \int_{-2}^{0} (x^3 + 3x^2 + 4)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 4x\right]_{-2}^{0} = -(4 - 8 - 8) = 12.$$

Punto d)

d) Si dimostri infine che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione $f(x)$ la traslazione di vettore $\vec{v}\,(\alpha, \beta)$. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, affinché la funzione traslata risulti dispari.

Per dimostrare che il grafico della funzione $f(x)$ è simmetrico rispetto al flesso $F\ (-1{,}6)$ scriviamo le equazioni della simmetria centrale rispetto a questo punto:

$$\begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = 12 - y \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della curva si ottiene:

$$12 - y = (-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 + 4$$

ossia

$$12 - y = -8 - 12x - 6x^2 - x^3 + 12 + 12x + 3x^2 + 4$$

che fornisce

$$12 - y = -8 - 12x - 6x^2 - x^3 + 12 + 12x + 3x^2 + 4$$

$$-y = -x^3 - 3x^2 - 4$$

che, cambiata di segno, è la stessa equazione di partenza

$$y = x^3 + 3x^2 + 4\,.$$

Il vettore della traslazione per portare il flesso nell'origine sarà $\vec{v}(1, -6)$. Scriviamo le equazioni della traslazione

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 6 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 6 \end{cases}$$

Sostituendo, otteniamo

$$y' + 6 = (x' - 1)^3 + 3(x' - 1)^2 + 4$$

ovvero (tornando a sostituire *x* a *x'* e *y* a *y'*)

$$y + 6 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 + 4$$

da cui otteniamo

$$y = x^3 - 3x = g(x)$$

che è una funzione dispari perché

$$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x).$$

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio/Alto	☐ Alto	☐ Molto alto (punto c)	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre	

È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente