

Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 12 settembre 2024

PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi

Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

- Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto P in cui γ_1 e γ_2 si intersecano.
- La retta di equazione $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, incontra γ_1 e γ_2 , rispettivamente, nei punti P_1 e P_2 . Determinare il valore del parametro t , in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.
- Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3 .
- Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ spiegando perché, in $x = 0$, le funzioni $F(x)$ ed $f'(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine.

Soluzione

Consideriamo la funzione esponenziale:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Punto a)

- Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto P in cui γ_1 e γ_2 si intersecano.

La funzione $f(x)$ è definita sui reali, sempre positiva, pari, derivabile (e quindi continua) per ogni x reale avente come asintoto l'asse delle x . Il massimo relativo (e assoluto) si ha per $x = 0$ e vale $y = 1$. Il grafico è a forma di “campana”.

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Inoltre per $x > 0$ si ha $f'(x) < 0$ e per $x < 0$ si ha $f'(x) > 0$. Quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo (e assoluto) e il massimo vale $f(0) = 1$.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = -2(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Pertanto i flessi sono i punti di ascissa $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per valori esterni all'intervallo dei punti di flesso, la curva è convessa. Il grafico della funzione è riportato in figura 1.

Studiamo ora la funzione $f'(x)$.

La derivata prima è una funzione definita sui reali, dispari, il cui grafico passa per l'origine degli assi e che ha come asintoto l'asse delle ascisse.

I punti di flesso della $f(x)$ diventano rispettivamente $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ il punto di massimo relativo (e assoluto) della $f'(x)$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ il punto di minimo relativo (e assoluto) della $f'(x)$.

In tali punti si ha

$$f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

Quindi, essendo $f'(x)$ dispari, si ha:

$$f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Calcoliamo ora la derivata terza, ossia la derivata seconda di $f'(x)$:

$$e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

$$f'''(x) = 2(-2xe^{-x^2}(2x^2 - 1) + 4xe^{-x^2}) = 4xe^{-x^2}(1 - 2x^2 + 2)$$

e in definitiva

$$f'''(x) = 4xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

il cui segno dipende dalla funzione polinomiale $x(3 - 2x^2)$. Quindi la funzione $f'(x)$ ha i flessi nei punti di ascissa $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ed è convessa nella semiretta $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ e

nell'intervallo $0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$ ed è concava altrimenti.

Nella figura 1 riportiamo i grafici di $f(x)$ e di $f'(x)$.

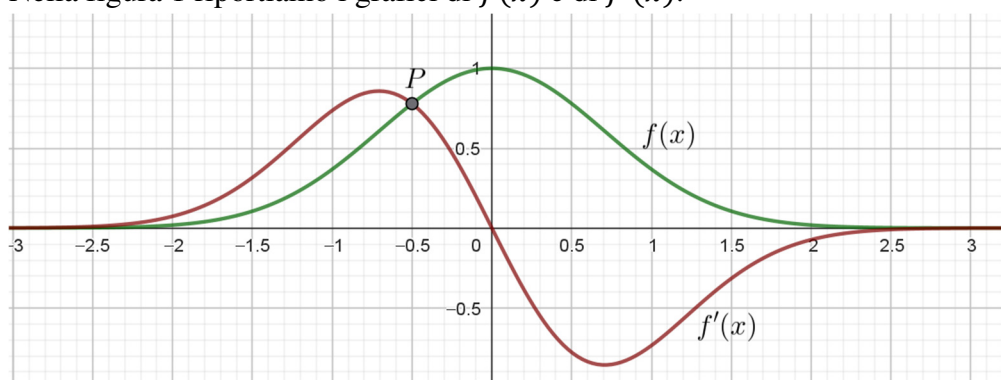


figura 1

Per determinare le coordinate del punto in cui i grafici di $f(x)$ e di $f'(x)$ si intersecano, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(x) \end{cases}$$

che equivale all'equazione $f(x) = f'(x)$. Si ottiene

$$e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

Quindi si ha $1 = -2x$, ossia $x = -\frac{1}{2}$ e il punto P ha coordinate

$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right).$$

Punto b)

- b) La retta di equazione $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, incontra γ_1 e γ_2 , rispettivamente, nei punti P_1 e P_2 . Determinare il valore del parametro t , in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.

Intersechiamo le due curve con la retta di equazione $x = t$. Il punto P_1 ha coordinate (t, e^{-t^2}) e il punto P_2 di coordinate $(t, -2te^{-t^2})$.

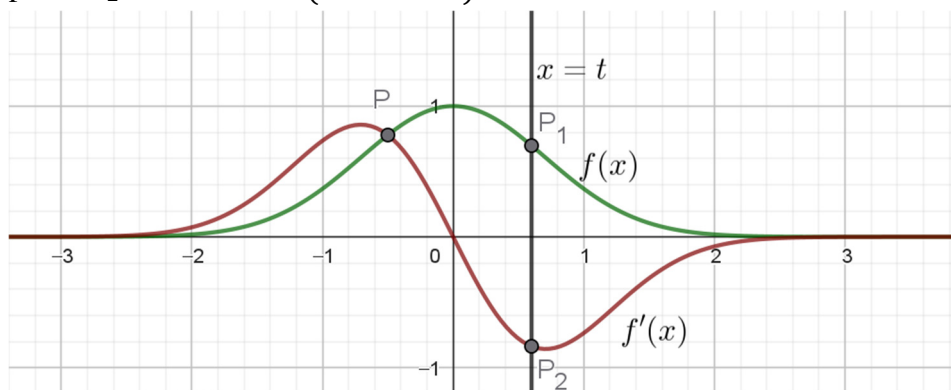


figura 2

La lunghezza del segmento P_1P_2 è data dalla funzione

$$l(t) = |f(t) - f'(t)|$$
$$l(t) = |e^{-t^2} + 2te^{-t^2}| = e^{-t^2}|1 + 2t|.$$

Per $t \geq -\frac{1}{2}$ si ottiene

$$l(t) = |e^{-t^2} + 2te^{-t^2}| = e^{-t^2}(1 + 2t)$$

che ha come derivata

$$l'(t) = -2te^{-t^2}(1 + 2t) + 2e^{-t^2} = 2e^{-t^2}(1 - 2t)$$

il cui segno dipende solo da $1 - 2t$. Pertanto, $l'(t) \geq 0$ se e solo se $t \leq \frac{1}{2}$. Il massimo del segmento si ha quindi per $t = \frac{1}{2}$ e la lunghezza massima del segmento è

$$l\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e}}.$$

Punto c)

- c) Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3 .

Disegniamo il grafico di $f'(x)$ e di $f''(x)$ nello stesso sistema di assi cartesiani e troviamo il loro punti di intersezione.

Si trova immediatamente che si incontrano per $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ (figura 3).

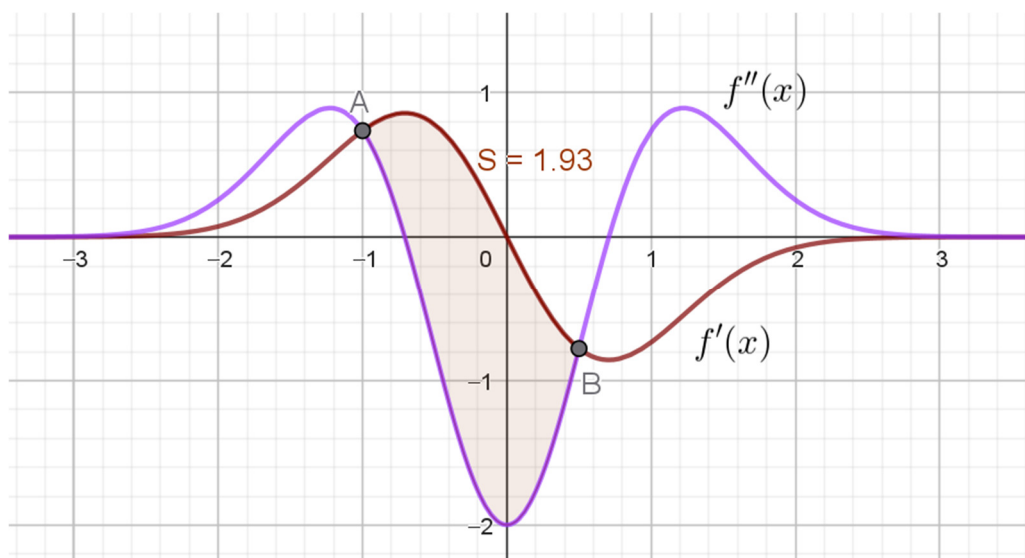


figura 3

Pertanto l'area richiesta è data dal seguente integrale definito:

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (f'(x) - f''(x)) dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2xe^{-x^2} - 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)) dx =$$

$$S = 2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} (-2x^2 - x + 1) dx.$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito [non facile...]:

$$\int e^{-x^2} (-2x^2 - x + 1) dx.$$

Lo scomponiamo come segue:

$$\int e^{-x^2} (-2x^2 - x + 1) dx = \int e^{-x^2} (-2x^2 - x) dx + \int e^{-x^2} dx \quad (*)$$

Calcoliamo ora per parti il primo integrale dopo aver osservato:

$$\int e^{-x^2} (-2x^2 - x) dx = \int (-2x) e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$\int (-2x) e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2}\right) - \int e^{-x^2} dx.$$

Sostituendo nell'integrale (*)

$$\int e^{-x^2} (-2x^2 - x + 1) dx = e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2}\right) - \int e^{-x^2} dx + \int e^{-x^2} dx =$$

$$= e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2}\right) + c.$$

Ritornando all'integrale definito, abbiamo:

$$S = 2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} (-2x^2 - x + 1) dx = 2 \cdot \left[e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \cdot \left[e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(e^{-\frac{1}{4}} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{2e} \right) \approx 1,93.$$

Punto d)

d) Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, calcolare il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ spiegando perché, in $x = 0$, le funzioni $F(x)$ ed $f'(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine.

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{-2xe^{-x^2}}.$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando la prima regola di de l'Hôpital, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}}{2e^{-x^2}(2x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(2x^2 - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Poiché il limite esiste finito non nullo, la funzione $F(x)$ e la funzione $f'(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per x che tende a 0.

Commento

Problema molto laborioso e pieno di calcoli. L'integrale al punto c) è molto difficile e non si pensa sia stato svolto da molti studenti.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta ☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente