

Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 12 settembre 2024

QUESITO 3 - soluzione di L. Tomasi

3. Il centro di una superficie sferica S è il punto di intersezione tra la retta r individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta t passante per i punti $A(-2, 3, 0)$ e $B(2, -1, 2)$. La superficie S è inoltre tangente al piano α di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$. Qual è l'equazione di S ?

Soluzione

Scriviamo le equazioni parametriche della retta t passante per i punti A e B . Contrariamente al testo, preferiamo chiamarla s e indicare con t il parametro.

Si ottiene

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Sostituendo nelle equazioni della retta r , otteniamo

$$\begin{cases} 2 + 4t - 1 - 4t - 4 - 4t = 0 \\ 6 + 12t - 2 - 8t - 1 = 0 \end{cases}$$

Da entrambe queste equazioni si ottiene $t = -\frac{3}{4}$, che fornisce il centro della superficie sferica:

$$C\left(-1, 2, \frac{1}{2}\right).$$

La superficie sferica è tangente al piano di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$ e quindi il suo raggio è dato da:

$$r = \frac{|4(-1) - 2 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Pertanto la superficie sferica ha equazione

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

ossia

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + z + 3 = 0.$$

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☒ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta ☒ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre	

Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☐ Sì	☒ No	☐ Parzialmente