

**Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 12 settembre 2024**

**QUESITO 4 - soluzione di L. Tomasi**

4. Determinare il valore del parametro reale  $k > 1$  in modo che il valor medio della funzione

$$f(x) = \ln(x^3) + \frac{3x - 3}{x}$$

sull'intervallo  $[1, k]$  sia uguale a  $1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ .

**Soluzione**

La funzione data ha per dominio l'insieme dei numeri reali positivi ed è una funzione derivabile e quindi continua nel suo dominio. Pertanto è anche integrabile.

Per il teorema della media integrale, si ha

$$\frac{1}{k-1} \int_1^k f(x) dx = 1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad (*)$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito

$$\int f(x) dx = \int \left( \ln(x^3) + \frac{3x-3}{x} \right) dx = \int \ln(x^3) dx + 3 \int \frac{x-1}{x} dx.$$

Il primo di questi due integrali si calcola per parti:

$$\int \ln(x^3) dx = x \ln(x^3) - \int x \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 dx = x \ln(x^3) - 3x + c.$$

Il secondo integrale è dato da

$$3 \int \frac{x-1}{x} dx = 3x - 3 \ln|x| + c.$$

Poiché, in base al dominio si ha  $x > 0$ , si ha quindi:

$$\int f(x) dx = x \ln(x^3) - 3x + 3x - 3 \ln x + c$$

ossia

$$\int f(x) dx = x \ln(x^3) - 3 \ln x + c = \ln(x^3)(x-1) + c.$$

Tornando all'integrale definito, si ha

$$\int_1^k f(x) dx = [\ln(x^3)(x-1)]_1^k = (k-1) \ln k^3.$$

Sostituendo nell'equazione (\*) si ha

$$\frac{1}{k-1} (k-1) \ln k^3 = 1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\ln k^3 = 1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln k^3 = 1$$

$$\ln\left(\frac{5}{2} k^3\right) = 1$$

$$\frac{5}{2} k^3 = e$$

e finalmente...

$$k = \sqrt[3]{\frac{2}{5}e}$$

Commento

Argomento: analisi matematica; teorema del valor medio integrale. Integrazione per parti.

Piuttosto laborioso, inutilmente...

**Tabella di analisi del quesito**

<b>Livello di difficoltà stimato</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
<b>Formulazione del quesito</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta	<input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
<b>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro	
<b>L'argomento è presente nel QdR di Matematica</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro	
<b>Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre	
<b>È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?</b>	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre	
<b>Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?</b>	<input type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente	<input checked="" type="checkbox"/> No	
<b>Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente	