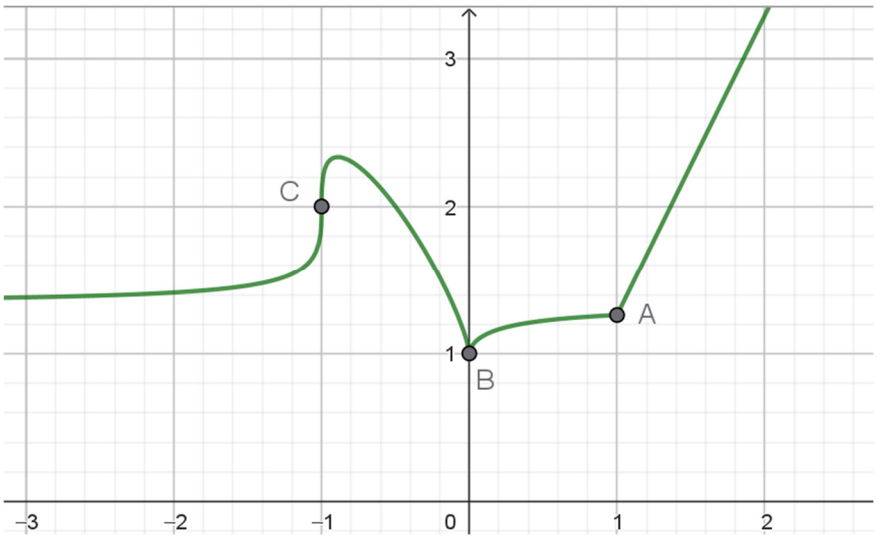
Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 12 settembre 2024

QUESITO 5 - soluzione di L. Tomasi

5. Individuare e classificare i punti in cui la funzione $f(x) = |x-1| + \sqrt[3]{x^3+x^2}$ è continua ma non derivabile.

Soluzione

La funzione ha come dominio l'insieme dei numeri reali ed è continua in tutto il suo dominio.
Possiede però tre punti di non derivabilità, che sono $x = 1$ (punto angoloso), $x = 0$ (punto cuspidale) e $x = -1$ (punto a tangente verticale).
Con una calcolatrice grafica è possibile ottenere il grafico di questa funzione (vedi figura).



figura

Esaminiamo il punto $x = 1$. Per $x \geq 1$ la funzione è

$$f(x) = x - 1 + \sqrt[3]{x^3+x^2}\,.$$

La sua derivata prima è:

$$f'(x) = 1 + \frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}.$$

La derivata destra nel punto $x = 1$ è pertanto

$$f'_+(1) = 1 + \frac{5}{3\sqrt[3]{4}}.$$

Per $x < 1$ la funzione è

$$f(x) = 1 - x + \sqrt[3]{x^3+x^2}\,.$$

La sua derivata prima è:

$$f'(x) = -1 + \frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}.$$

Il limite della $f'(x)$ per x tendente a 1 da sinistra è $-1 + \frac{5}{3\sqrt[3]{4}}$. La funzione, pertanto, non è derivabile per $x = 1$ che è un punto angoloso.
La derivata prima, inoltre, non esiste nei punti $x = 0$ e $x = -1$.
In un opportuno intorno destro di $x = 0$, la funzione ha come espressione:

Per $x < 1$ la funzione è

$$f(x) = 1 - x + \sqrt[3]{x^3 + x^2}\,.$$

La sua derivata prima è:

$$f'(x) = -1 + \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}.$$

Per x tendente a 0 da destra si ha il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-1 + \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-1 + \frac{3x + 2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}\right) = +\infty$$

Per x tendente a 0 da sinistra si ha il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-1 + \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-1 + \frac{3x + 2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}\right) = -\infty$$

Quindi il punto $x = 0$ è un punto di non derivabilità di tipo cuspidale.

Per $x < 0$ la funzione è

$$f(x) = 1 - x + \sqrt[3]{x^3 + x^2}\,.$$

La sua derivata prima è:

$$f'(x) = -1 + \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}.$$

Per x tendente a -1 si ha il seguente limite

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = \lim_{x\to -1}\left(-1 + \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}\right) = \lim_{x\to -1}\left(-1 + \frac{3x + 2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}\right) = +\infty$$

Quindi il punto $x = -1$ è un punto di non derivabilità con tangente parallela all'asse y.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta / ☒ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente