

QUESITO 7 - soluzione di L. Tomasi

7. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy , l'equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.

Soluzione

Consideriamo l'equazione $xy = k$ con $k \neq 0$. Supponiamo, per fissare le idee che $k > 0$, essendo del tutto analogo il procedimento per $k < 0$.

I grafici sono riportati in figura 1 e figura 2.

Per trovare le coordinate dei vertici intersechiamo, nel primo caso, la bisettrice del primo e terzo quadrante con l'iperbole

$$\begin{cases} xy = k \\ y = x \end{cases}$$

Otteniamo i vertici

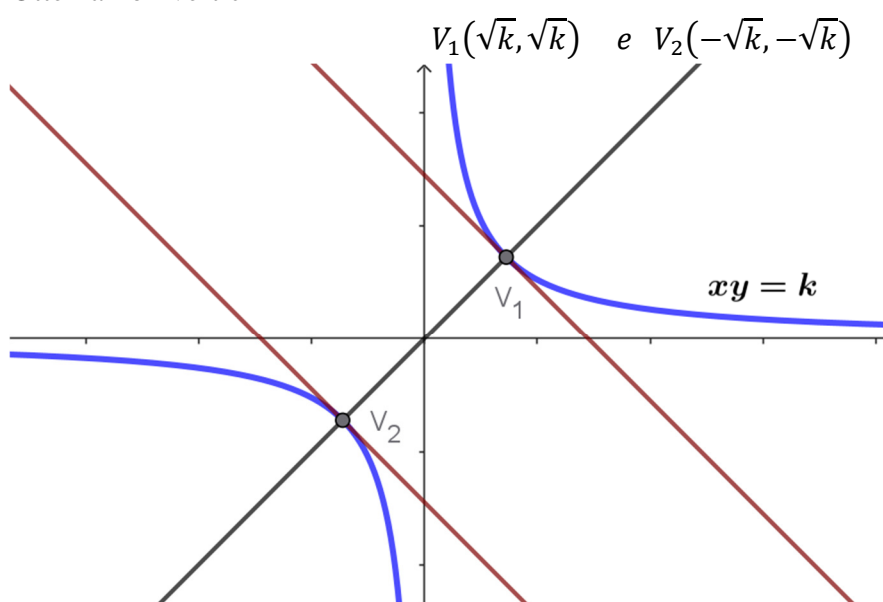


figura 1

La funzione $f(x) = \frac{k}{x}$ ha per derivata prima

$$f'(x) = -\frac{k}{x^2}.$$

Pertanto la retta tangente all'iperbole nel vertice V_1 ha equazione

$$y - \sqrt{k} = -\frac{k}{(\sqrt{k})^2}(x - \sqrt{k})$$

ossia

$$y - \sqrt{k} = -(x - \sqrt{k})$$

o, in forma esplicita

$$y = -x + 2\sqrt{k}$$

che è perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

E analogamente, la retta tangente all'iperbole nel vertice V_2 ha equazione

$$y + \sqrt{k} = -\frac{k}{(\sqrt{k})^2}(x + \sqrt{k})$$

ossia

$$y + \sqrt{k} = -(x + \sqrt{k})$$

o, in forma esplicita

$$y = -x - 2\sqrt{k}$$

che è perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

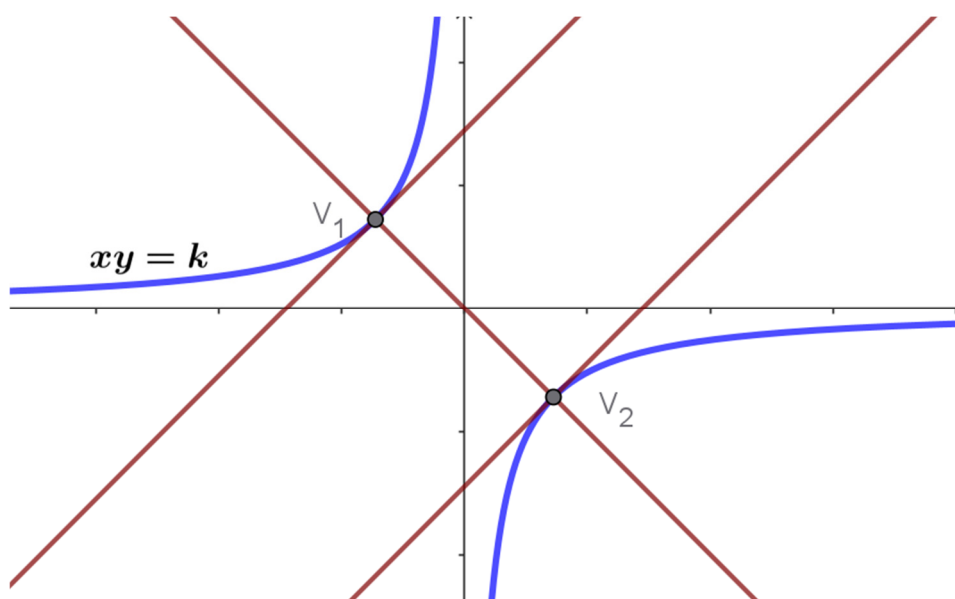


figura 2

Argomento: geometria analitica del piano (con l'uso delle derivate).

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì		☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ Sì		☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì		☐ No		☐ Parzialmente