

Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 12 settembre 2024

QUESITO 8- soluzione di L. Tomasi

8. Scrive Paolo Giordano ne *La solitudine dei numeri primi*: «I numeri primi sono divisibili soltanto per 1 e per sé stessi. Se ne stanno al loro posto nell'infinita serie dei numeri naturali, schiacciati come tutti fra due, ma un passo in là rispetto agli altri».

Si considerino la funzione $f(x) = x^p$ e la sua derivata $(p - 1)$ -esima $f^{(p-1)}$. Si può dimostrare che, se p è un numero primo, allora p divide $f^{(p-1)} + 1$. Verificare la correttezza di tale affermazione per tutti i numeri primi minori di 10.

Osservazione. Il testo contiene un errore all'inizio: la funzione doveva essere $f(x) = x^{p-1}$, con p numero naturale maggiore di 1.

Si ha quindi

$$f(x) = x^{p-1}$$

$$f'(x) = (p - 1)x^{p-2}$$

$$f''(x) = (p - 1)(p - 2)x^{p-3}$$

...

$$f^{(p-1)}(x) = (p - 1) \dots (p - (p - 1)) = (p - 1)! = k$$

Pertanto la derivata $(p - 1)$ -esima è:

$$f^{(p-1)}(x) + 1 = (p - 1)! + 1.$$

“Se p è primo, allora p divide $f^{(p-1)}(x) + 1 = (p - 1)! + 1$ ”.

[Nota. Si tratta del teorema di Wilson di Teoria dei numeri, che comunque non occorre conoscere.]

Se p è un numero naturale maggiore di 1,

Se p è primo, allora $(p - 1)! + 1$ è divisibile per p .

se $p = 2$ si ha $(2 - 1)! + 1 = 1! + 1 = 1 + 1 = 2$ divisibile per 2;

se $p = 3$ si ha $(3 - 1)! + 1 = 2! + 1 = 2 + 1 = 3$ divisibile per 3;

se $p = 5$ si ha $(5 - 1)! + 1 = 4! + 1 = 24 + 1 = 25$ divisibile per 5;

se $p = 7$ si ha $(7 - 1)! + 1 = 6! + 1 = 720 + 1 = 721$ divisibile per 7.

Vedi anche la seguente tabella per la verifica richiesta.

| 1 | n | $(n-1)!+1$ | Resto | |
|----|----|------------|-------|-------|
| 2 | 2 | 2 | 0 | primo |
| 3 | 3 | 3 | 0 | primo |
| 4 | 4 | 7 | 3 | |
| 5 | 5 | 25 | 0 | primo |
| 6 | 6 | 121 | 1 | |
| 7 | 7 | 721 | 0 | primo |
| 8 | 8 | 5041 | 1 | |
| 9 | 9 | 40321 | 1 | |
| 10 | 10 | 362881 | 1 | |

Commento. Esercizio di verifica di una affermazione. Argomenti coinvolti: divisibilità, fattoriale-

Tabella di analisi del quesito

| | | | | |
|---|---|---|--------------------------------------|--|
| Livello di difficoltà stimato | <input checked="" type="checkbox"/> Basso | <input type="checkbox"/> Medio | <input type="checkbox"/> Alto | <input type="checkbox"/> Molto alto |
| Formulazione del quesito | <input checked="" type="checkbox"/> Scorretta | <input type="checkbox"/> Ambigua | <input type="checkbox"/> Poco chiara | <input type="checkbox"/> Corretta <input type="checkbox"/> Molto chiara |
| L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali | <input type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | | <input checked="" type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro |
| L'argomento è presente nel QdR di Matematica | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | | <input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro |
| Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | | <input type="checkbox"/> Non sempre |
| È un argomento presente nei libri di testo di Matematica? | <input checked="" type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non sempre | | <input checked="" type="checkbox"/> Sempre |
| Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input checked="" type="checkbox"/> Solo parzialmente | | <input type="checkbox"/> No |
| Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica? | <input type="checkbox"/> Sì | <input checked="" type="checkbox"/> No | | <input type="checkbox"/> Parzialmente |