Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 4 luglio 2024

QUESITO 4 - soluzione di L. Tomasi

4. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right)$, con a parametro reale positivo. Successivamente, individuare il valore di a in corrispondenza del quale risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[1; 7]$ e le coordinate del punto che ne verifica la tesi.

Soluzione

Il dominio della funzione si trova imponendo il sistema

$$\begin{cases} ax - 7 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

e si ottiene

$$x > \frac{7}{a}.$$

In tale dominio la funzione è continua e derivabile e a maggior ragione lo è nell'intervallo $[1, 7]$.
Imponiamo l'ulteriore condizione affinché siano verificate le tre ipotesi del teorema di Rolle:

$$f(1) = f(7)$$

ossia

$$\ln(a - 7) = \ln\left(\frac{7a - 7}{49}\right)$$

Si ha pertanto

$$a - 7 = \frac{7a - 7}{49}$$

che fornisce

$$7a - 49 = a - 1$$

ovvero $6a = 48$ e in definitiva $a = 8$.
La funzione ha pertanto l'espressione

$$f(x) = \ln\left(\frac{8x - 7}{x^2}\right)$$

con dominio $x > \frac{7}{8}$.
La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{-8x + 14}{x^2(8x - 7)}.$$

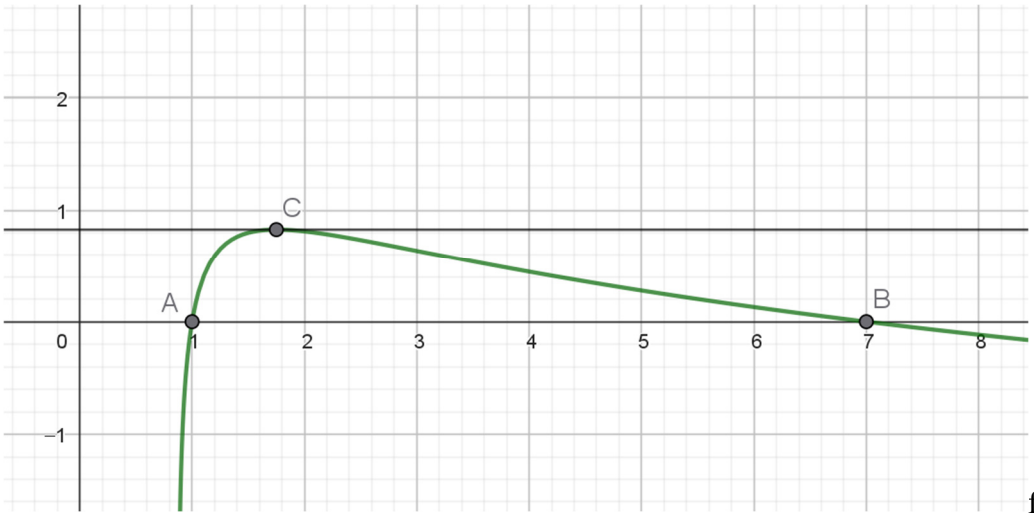
Per determinare il punto la cui esistenza è garantita dalla tesi, poniamo

$$f'(x) = 0$$

ottenendo

$$x = \frac{7}{4}$$

che è l'ascissa dell'unico punto interno all'intervallo in cui si annulla la derivata prima (vedi figura).



figura

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☒ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta / ☒ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente