

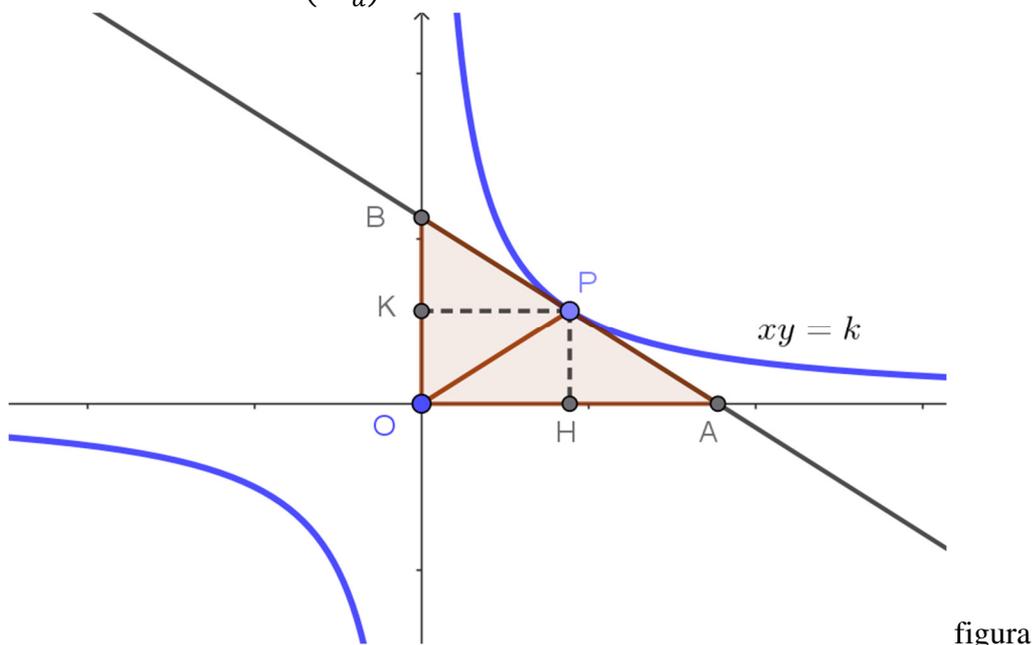
Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 4 luglio 2024

QUESITO 6 - soluzione di L. Tomasi

6. In un sistema di assi cartesiani Oxy , si consideri l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo. Sia t la retta tangente all'iperbole in un suo punto P . Detti A e B i punti in cui t interseca gli assi del riferimento, dimostrare che i triangoli APO e BPO sono equivalenti e che la loro area non dipende dalla scelta di P .

Soluzione

Tracciamo il grafico dell'iperbole equilatera di equazione $xy = k$ e supponiamo, per fissare le idee, che $k > 0$. Consideriamo poi un generico punto P dell'iperbole, per esempio nel I quadrante; P avrà pertanto coordinate: $P\left(\alpha; \frac{k}{\alpha}\right)$.



La retta tangente nel punto P all'iperbole, ha per equazione

$$y - \frac{k}{\alpha} = -\frac{k}{\alpha^2}(x - \alpha)$$

ossia, in forma esplicita

$$y = -\frac{k}{\alpha^2}x + \frac{2k}{\alpha}.$$

Intersecando la retta tangente con l'asse delle ascisse, si ottiene il punto

$$A(2\alpha, 0),$$

Intersecando la retta tangente con l'asse delle ordinate, si ottiene il punto

$$B\left(0, \frac{2k}{\alpha}\right).$$

Pertanto l'area del triangolo OAP è

$$Area(OAP) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{k}{\alpha} = k$$

e, in generale

$$Area(OAP) = |k|.$$

L'area del triangolo BPO è

$$Area(BPO) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{2k}{\alpha} = k$$

e, in generale

$$Area(BPO) = |k|.$$

Quindi

$$Area(OAP) = Area(BPO)$$

I due triangoli sono entrambi isosceli (perché l'ascissa di A è il doppio dell'ascissa del punto P e analogamente l'ordinata di B è il doppio dell'ordinata di P) ed hanno la stessa area del rettangolo $OHPK$ che ha i lati sugli assi coordinati e due vertici opposti in O e P .

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del quesito	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente