

Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 4 luglio 2024

QUESITO 8 - soluzione di L. Tomasi

8. Scrive Leonardo Sinisgalli, in un brano tratto da *Furor Mathematicus*: «Avevo in mente un capitolo sulle leggi del caso: volevo trovare le parentele tra il triangolo di Tartaglia, relativo ai coefficienti del polinomio $(a + b)^n$ e il triangolo aritmetico di Pascal, che ci dà la probabilità di fare m volte croce in n partite giuocate a testa e croce».

Descrivere il legame esistente tra i coefficienti binomiali ed il calcolo delle probabilità.

Soluzione

Questo quesito è più adatto a una prova orale rispetto a una prova scritta.

Il triangolo di Tartaglia (o triangolo di Pascal) è formato dai coefficienti della potenza del binomio con esponente un numero naturale. Ha la forma di un “triangolo” isoscele, infinitamente esteso, come indicato di seguito.

										$(a + b)^0$
										$(a + b)^1$
										$(a + b)^2$
										$(a + b)^3$
										$(a + b)^4$
										$(a + b)^5$
										$(a + b)^6$
										

I coefficienti di questo “triangolo” hanno molte proprietà che sono state studiate da Pascal.

Dal punto di vista combinatorio rappresentano il numero di combinazioni (semplici) che si possono fare a partire da n oggetti, prendendone k alla volta, con k numero naturale, $0 \leq k \leq n$.

Questi numeri si indicano con

$$\binom{n}{k}.$$

Si dimostra questo teorema

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!},$$

dove al numeratore ci sono quindi k fattori.

Per esempio

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Si pone inoltre

$$\binom{n}{0} = 1.$$

I legami tra il triangolo di Tartaglia e il calcolo delle probabilità sono molteplici- Forse il legame più stretto è con la variabile aleatoria binomiale, detta anche di Bernoulli (Jacques Bernoulli, XVII sec., il “probabilista” della famiglia di scienziati Bernoulli).

Supponiamo, come dice il testo proposto, di lanciare una moneta per n volte e vogliamo sapere qual è la probabilità di ottenere k volte “testa” su n lanci (con $0 \leq k \leq n$). Indicata con p la probabilità di ottenere “testa” (successo) e con $q = 1 - p$ la probabilità di ottenere “croce” (insuccesso), si ha

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Abbiamo indicato con X la variabile aleatoria che fornisce la probabilità di k successi su n lanci.

Per esempio, se lanciamo 6 volte una moneta “truccata”, in cui si abbia $\frac{1}{3}$ di probabilità di ottenere “testa”, allora la probabilità di ottenere 4 “teste” su 6 lanci è data da:

$$p(X = 3) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 15 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{243} \approx 8,2\%.$$

La distribuzione di probabilità è indicata nella seguente tabella.

k	0	1	2	3	...	$n - 1$	n
p	$\binom{n}{0} p^0 q^n$	$\binom{n}{1} p q^{n-1}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	$\binom{n}{3} p^3 q^{n-3}$	...	$\binom{n}{n-1} p^{n-1} q$	$\binom{n}{n} p^n$

Ad esempio, per $n = 20$ lanci e $p = \frac{1}{2}$ (moneta equilibrata), l’istogramma della probabilità è il seguente.

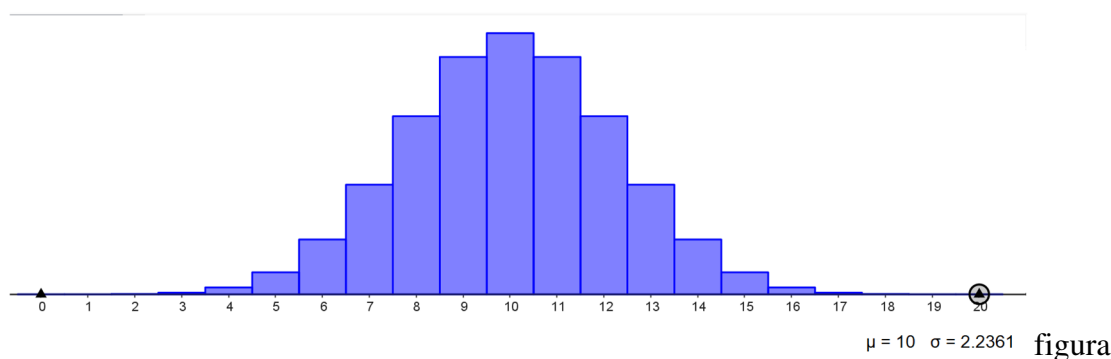


Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì		☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	

Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì	☒ No	☒ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente