Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica - 19 giugno 2025

PROBLEMA 1 – soluzione a cura di L. Rossi e L. Tomasi

PROBLEMA 1

«*La ragione non è nulla senza l'immaginazione*» - Cartesio

Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r, di centro l'origine e raggio r, e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

Soluzione

Punto a)

a) Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k. Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k, per opportuni valori di k, un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy, tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} .

$$f_k(x) = k|x| = \begin{cases} kx & x \geq 0 \\ -kx & x < 0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione $f_k(x)$ è costituito dall'unione di due semirette aventi l'origine comune in O, origine degli assi, simmetriche rispetto all'asse y che giacciono nel terzo e quarto quadrante.
La funzione non è quindi derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso (con derivata destra $f_{k+}'(0) = k$ e derivata sinistra $f_{k-}'(0) = -k$), ma è ovviamente continua.

Indicando con α l'ampiezza in radianti dell'angolo al centro O del settore circolare e con l la lunghezza dell'arco sotteso, vale la relazione $\alpha = \frac{l}{r}$.
L'area $S = \pi$ del settore circolare si calcola con la proporzione: $S: \pi r^2 = \alpha: 2\pi$, da cui si ottiene

$$S = \frac{1}{2} r^2 \alpha \, .$$

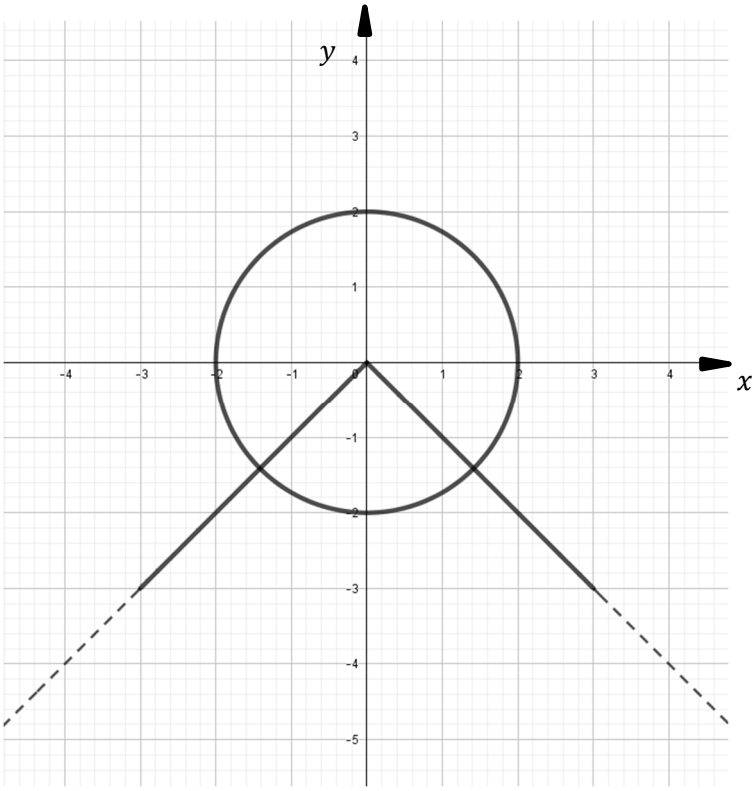
Tenuto conto della relazione precedente e che $S = \pi$, si ottiene: $lr = 2\pi$.
La lunghezza del contorno del settore circolare è $l + 2r = 4 + \pi$.
Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} lr = 2\pi \\ l + 2r = 4 + \pi \end{cases}$$

ed eseguendo i calcoli di arriva all'equazione risolvente di secondo grado in r:

$$2r^2 - (4 + \pi)r + 2\pi = 0 \, ,$$

con $\Delta = (4 - \pi)^2$, le cui soluzioni sono $r = \frac{\pi}{2}$ o $r = 2$, la maggiore delle quali è $r = 2$.



Punto b)

b) Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a;\ b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h. Qual è l'espressione analitica di h?

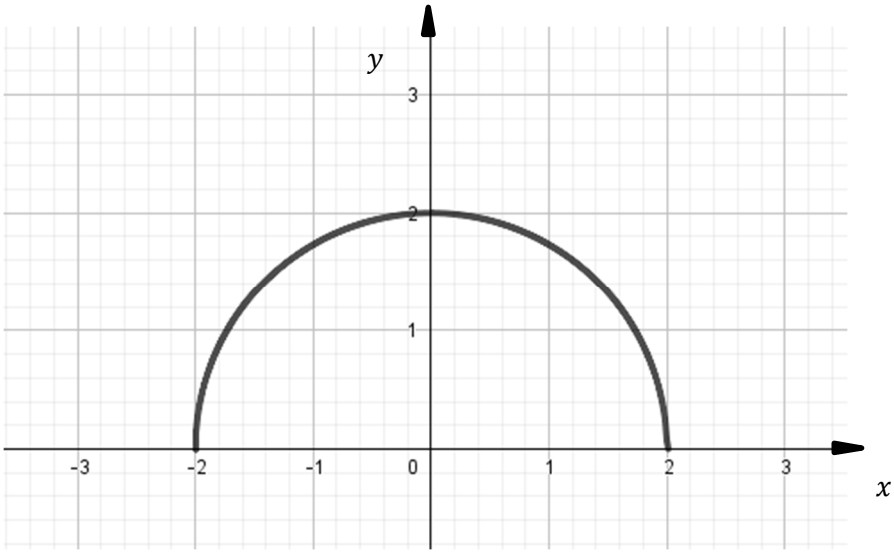
La funzione $g(x)$ ha ovviamente per grafico una semicirconferenza di centro O e raggio 2 situata nel semipiano delle $y \geq 0$.
Poiché il testo chiede di studiare questa funzione, osserviamo quanto segue.
Il dominio D della funzione $y = g(x)$ si ottiene imponendo che $4 - x^2 \geq 0$ le cui soluzioni sono $-2 \leq x \leq 2$.
La funzione è continua nel dominio e sempre non negativa. Si annulla in $x = -2$ o $x = 2$.
Si tratta di una funzione pari poiché $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D$.
La derivata: $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ è definita in $-2 < x < 2$, quindi la funzione non è derivabile in $x = -2$ e per $x = 2$, dove si ha

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\infty$$

Dunque le rette tangenti alla funzione in $x = -2$ e $x = 2$ sono parallele all'asse y.
Studiando il segno della derivata prima si deduce che la funzione è crescente per $-2 \leq x \leq 0$ e descescente per $0 \leq x \leq 2$; $x = 0$ è punto di massimo assoluto, $g(0) = 2$.
Perciò l'insieme immagine è $0 \leq y \leq 2$.

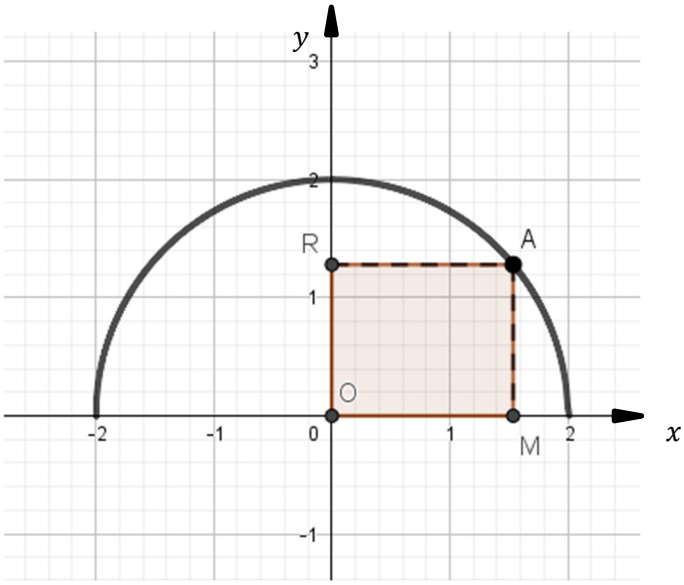
Il grafico della funzione è quello della semicirconferenza di centro l'origine e raggio 2 del primo e secondo quadrante (infatti dall'equazione di C_2: $x^2 + y^2 = 4$, esplicitando y, con $y \geq 0$, si ottiene proprio $y = g(x) = \sqrt{4 - x^2}$).



La funzione $y = g(x)$ non è invertibile nel suo dominio poiché non è iniettiva; il più grande intervallo richiesto in cui, con $b > 0$, è $[0, 2]$.
L'inversa $h(x)$ è la funzione stessa $g(x)$ con $0 \leq x \leq 2$ (il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante).

Punto c)

c) Sia A un punto del grafico di g, situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.



$A\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right)$ con $0 \leq x \leq 2$.

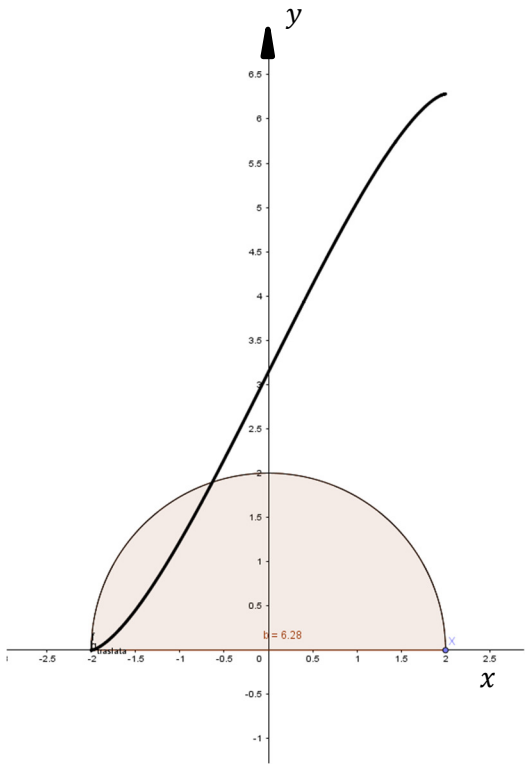
La funzione da ottimizzare è $y = x\sqrt{4-x^2}$, con $0 \le x \le 2$.
I punti di massimo e minimo della funzione $y = x\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4x^2 - x^4}$ sono gli stessi della funzione $y = 4x^2 - x^4$ con $0 \le x \le 2$.
Studiando il segno della sua derivata prima $y' = 8x - 4x^3$ con $0 \le x \le 2$, si ottiene che la funzione $y = 4x^2 - x^4$ è crescente per $0 \le x \le \sqrt{2}$ e decrescente per $\sqrt{2} \le x \le 2$, quindi assume valore massimo quando $x = \sqrt{2}$. In questo caso il quadrilatero *AMOR* è un quadrato di lato $\sqrt{2}$.

Per quanto riguarda il perimetro del quadrilatero *AMOR*, la funzione da ottimizzare è ora $y = 2\left(x + \sqrt{4-x^2}\right)$ con $0 \le x \le 2$.
Studiando il segno della sua derivata prima $y' = 2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$ con $0 \le x \le 2$, si ottiene che la tale derivata è non negativa quando $\sqrt{4-x^2} - x \ge 0$, quindi la funzione perimentro è crescente per $0 \le x \le \sqrt{2}$ e decrescente per $\sqrt{2} \le x \le 2$, e pertanto assume valore massimo quando $x = \sqrt{2}$.
Quindi il quadrilatero di perimetro massimo è sempre il quadrato.

Punto d)

d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4-t^2}\, dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F, dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

$$F(2) = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-t^2}\, dt$$



Utilizzando il significato geometrico di funzione integrale, essendo la funzione $y = \sqrt{4-x^2}$ non negativa nel suo dominio, $F(x)$ rappresenta l'area sottesa dalla funzione $y = \sqrt{4-x^2}$ nell'intervallo $-2 \le x \le 2$. Quindi $F(-2) = 0$, $F(2) = 2\pi$ (area del semicerchio), $F(0) = \pi$; inoltre $F(x)$ è sempre crescente perché $F'(x) = \sqrt{4-x^2}$ è sempre non negativa. La derivata seconda è data da: $F''^{(x)} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.
Quindi $F(x)$ è convessa per $-2 \le x \le 0$, concava per $0 \le x \le 2$.

Il punto di flesso è in $G(0, \pi)$. Si ha inoltre $F'(0) = 2$

L'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso è quindi: $y - \pi = 2(x - 0)$, ossia, in forma esplicita: $y = 2x + \pi$.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		