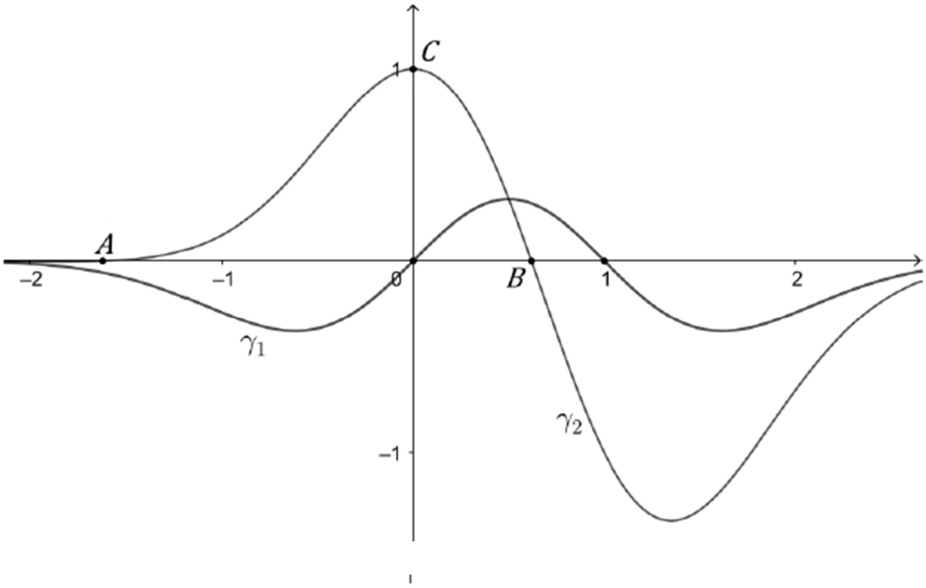
Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica – 19 giugno 2025

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di L. Tomasi e S. De Stefani

PROBLEMA 2

«La bellezza è mescolare, in giuste proporzioni, il finito e l'infinito» - attribuita a Platone



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g, definite su $\mathbb{R}$, le cui espressioni analitiche sono

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

a) Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\varphi$, ascissa del punto A, è uno zero di g.

b) Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1. Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2, rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2.

d) Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1, γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R.

Soluzione

Punto a)

Il numero φ è il numero aureo e vale circa 1,618.

Ricaviamo alcune informazioni dalla figura, anche se la figura è ambigua e queste informazioni, se non date esplicitamente, sono solo probabili (non si possono ricavare valori con precisione da una figura!).

Il polinomio $p(x)$ è di secondo grado. Poiché il grafico della funzione f deve avere come zeri, $x = 0$ e $x = 1$, deve essere del tipo

$$p(x) = kx(x-1) = k(x^2 - x).$$

Dovendo φ essere l'ascissa di un punto stazionario (di minimo relativo) di f, ne segue che deve essere

$$f'(\varphi) = 0\,.$$

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = p'(x)e^{p(x)} + p(x)p'(x)e^{p(x)} = e^{p(x)}p'(x)\big(1 + p(x)\big)\,.$$

Poiché $e^{p(x)} > 0$, $p'(x) = k(2x-1)$, ne segue che il polinomio $1 + p(x)$ deve annullarsi per $x = \varphi$:

$$1 + p(\varphi) = 0$$

ossia

$$1 + k(\varphi^2 - \varphi) = 0.$$

Poiché $\varphi^2 - \varphi = 1$, si ha per soluzione $k = -1$.

Pertanto $p(x) = x(1-x)$.

La funzione f ha quindi equazione

$$f(x) = (x - x^2)e^{x-x^2}$$

e pertanto si può intanto scrivere

$$g(x) = q(x)e^{x-x^2} = (ax^2 + bx + c)e^{x-x^2}.$$

Dal grafico (anche se la figura è ambigua… e non è lecito ricavare informazioni precise da una figura) di $g(x)$ si ha

$$g(0) = 1$$
$$g(-\varphi) = 0$$
$$g'(0) = 0\,.$$

Si ottiene pertanto

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Ne segue che

$$q(x) = -x^2 - x + 1$$

e

$$g(x) = (-x^2 - x + 1)e^{x-x^2}.$$

Punto b)

La funzione f ha equazione

$$f(x) = (x - x^2)e^{x-x^2}$$

Il grafico ci è già stato dato...

Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} (x - x^2)e^{x-x^2} = \text{forma ind.} \infty \cdot 0$$

Applicando la regola di De L'Hopital, si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^2}{e^{x^2-x}} = (\text{H.}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 2x}{(2x - 1)e^{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^{x^2-x}} = 0$$

e analogamente per $x \to -\infty$.

Quindi l'asse delle ascisse è asintoto per il grafico della funzione $f(x)$ sia a destra che a sinistra.

La derivata prima della funzione è:

$$f'(x) = (1 - 2x)(1 + x - x^2)e^{x-x^2}$$

che si può scrivere come

$$f'(x) = (2x - 1)(x^2 - x - 1)e^{x-x^2}$$

Studiandone il segno, si trova che si annulla in $x = \varphi$ (punto di minimo relativo e assoluto), $x = \frac{1}{2}$ (punto di massimo relativo e assoluto) e in $-\frac{1}{\varphi}$ (punto di minimo relativo e assoluto).

Ricaviamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = [2(x^2 - x + 1) + (2x - 1)^2 - (2x - 1)^2(x^2 - x - 1)]e^{x-x^2}$$

$$f''(x) = (-4x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 9x)e^{x-x^2}$$

$$f''(x) = x(-4x^3 + 8x^2 + 5x - 9)e^{x-x^2} = x(1 - x)(4x^2 - 4x - 9)e^{x-x^2}$$

Quindi i punti di flesso (figura 1) hanno ascisse rispettivamente $x = 0$, $x = 1$ e $x = \frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$ (queste ultime sono le radici del polinomio $4x^2 - 4x - 9$). La curva è pertanto convessa negli intervalli $-1 < x < 0,\ 1 < x < \frac{1+\sqrt{10}}{2}$ e concava altrimenti.

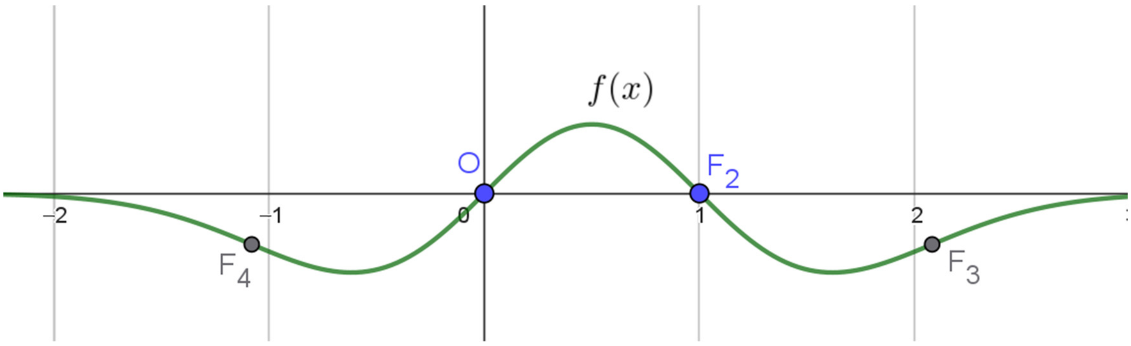


figura 1

La retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per il grafico della funzione $f(x)$.

Per dimostrare questo basta traslare la curva di $\frac{1}{2}$ con verso negativo, parallelamente all'asse x (figura 2).

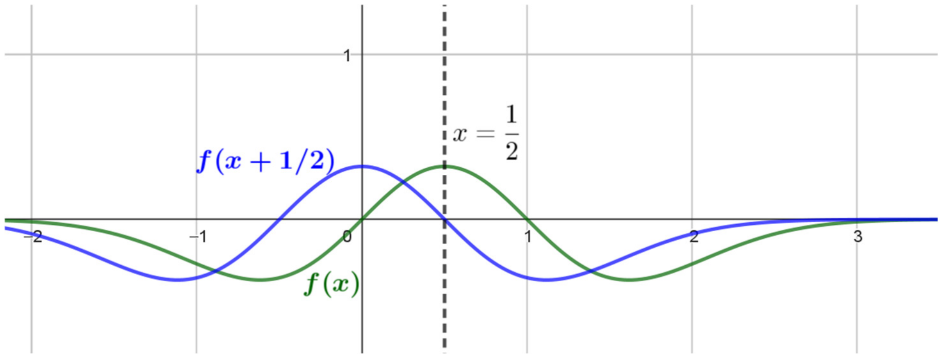


figura 2

Si ottiene allora

$$y = f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - x^2\right) e^{\frac{1}{4} - x^2}$$

che è una funzione pari. Questo dimostra che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per il grafico della $f(x)$.

L'immagine di $f(x)$ è l'insieme $f(\mathbb{R}) = \left[f(\varphi),\ f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$.

Si ha

$$f(\varphi) = (\varphi - \varphi^2)e^{\varphi - \varphi^2} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt[4]{e}\,.$$

Quindi l'immagine della funzione f è l'intervallo chiuso

$$\left[f(\varphi), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{4}\sqrt[4]{e}\right].$$

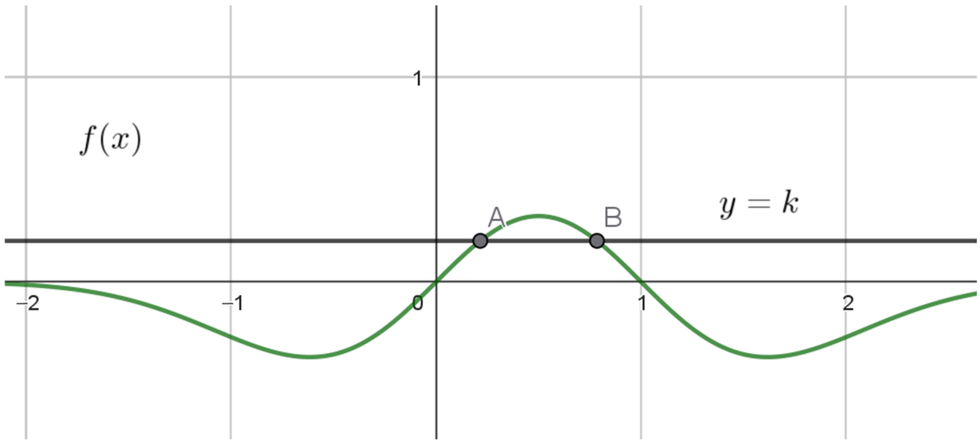


figura 3

Considerando il sistema (figura 3)

$$\begin{cases} y = k \\ y = f(x) \end{cases}$$

si trovano graficamente

2 soluzioni per $0 \leq k \leq \frac{1}{4}\sqrt[4]{e}$ (di cui due coincidenti per $k = \frac{1}{4}\sqrt[4]{e}$)

4 soluzioni per $-\frac{1}{e} \leq k < 0$ $\left(\text{di cui due soluzione doppie per } k = -\frac{1}{e}\right)$.

Punto c)

c) Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2, rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2.

Ne precedente punto a) abbiamo stabilito che

$$g(x) = (1 - x - x^2)e^{x-x^2}.$$

Intersecando il grafico di questa funzione con l'asse delle *x* si ottiene

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = g(x) \end{cases}$$

ossia

$$q(x) = 1 - x - x^2 = 0$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$

Risolvendo questa equazione, troviamo come soluzioni

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\varphi$$

e

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi}.$$

Si ottengono quindi i punti $A(-\varphi, 0)$, già dato nel testo, e il punto $B\left(\frac{1}{\varphi}, 0\right)$.

Per dimostrare che il triangolo *ABC* è rettangolo in *C* utilizziamo il teorema inverso del teorema di Pitagora. I vertici del triangolo hanno coordinate:

$$A(-\varphi, 0)$$
$$B\left(\frac{1}{\varphi}, 0\right)$$
$$C(0,1).$$

Si ha di conseguenza che

$$\overline{AB} = \varphi + \frac{1}{\varphi}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{1+\varphi^2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}$$

Poiché si verifica che

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

il triangolo rettangolo *ABC* è rettangolo in *C* (figura 4).

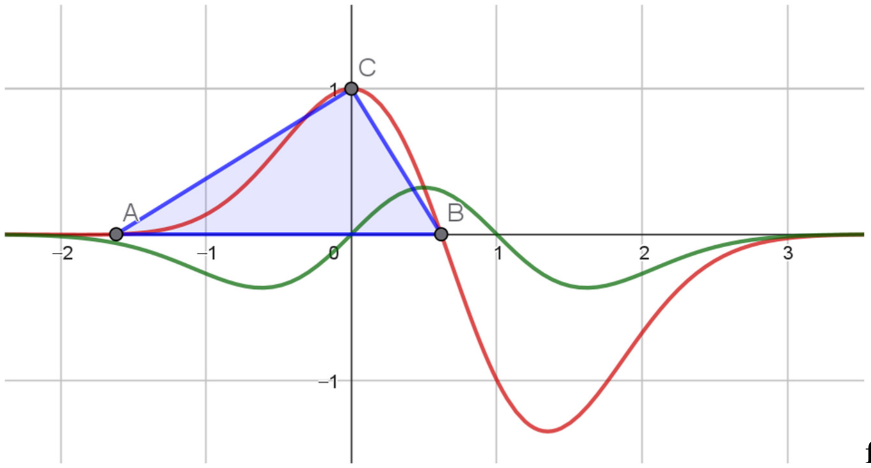


figura 4

Le curve γ_1 e γ_2 hanno un solo punto di intersezione che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione

$$p(x)e^{p(x)} = q(x)e^{p(x)}$$

ossia $p(x) = q(x)$, che fornisce

$$x - x^2 = 1 - x - x^2$$

da cui si ottiene $x = \frac{1}{2}$ e il punto

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\sqrt[4]{e}\right).$$

Intersechiamo ora le due curve con una retta parallela all'asse delle ordinate di equazione $x = h$, con $h \geq \frac{1}{2}$

Si ottengono i punti P_1 e P_2 (figura 5).

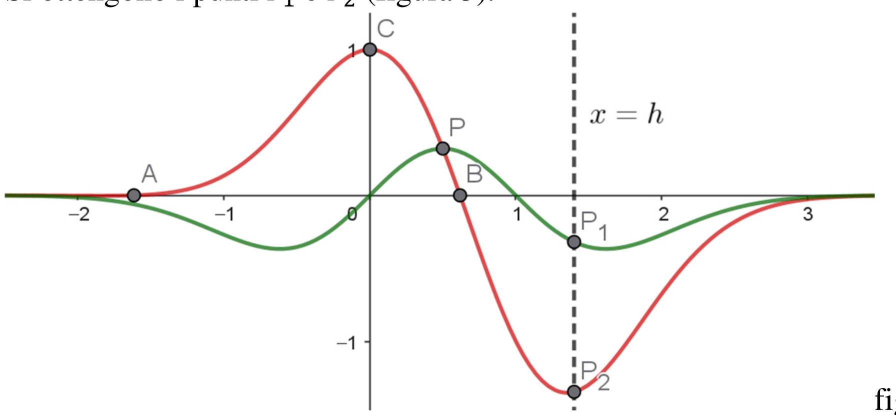


figura 5

La lunghezza del segmento P_1P_2 è data dalla funzione

$$l(x) = |f(x) - g(x)| = e^{p(x)}|p(x) - g(x)|$$

Quindi:

$$l(x) = e^{x-x^2}|2x - 1|\,.$$

Per $x \geq \frac{1}{2}$ si ha

$$l(x) = e^{x-x^2}(2x - 1)$$

che ha per derivata

$$l'(x) = e^{x-x^2}(-4x^2 + 4x + 1)$$

e il massimo si ha per $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

La lunghezza massima è $l_{max} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{e}}$.

.

Punto d)

Per calcolare l'area richiesta (figura 6) dobbiamo calcolare il seguente integrale definito:

$$Area(R) = \int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x-x^2}(1-2x)dx$$

Si ottiene quindi

$$Area(R) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x-x^2}(1-2x)dx = \left[e^{x-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{e} - 1\,.$$

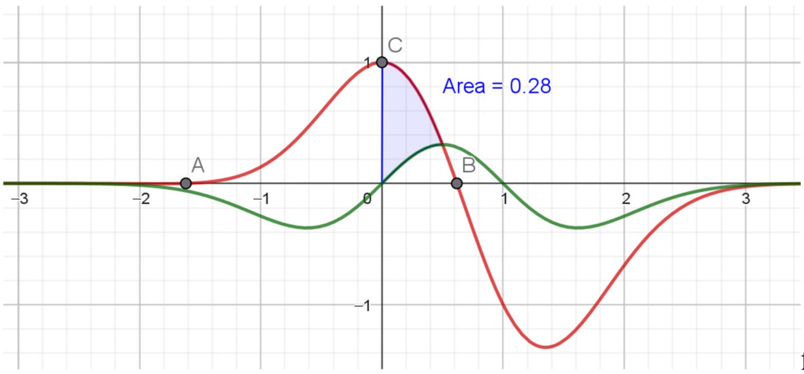


figura 6

Per determinare il valore di $t > \frac{1}{2}$ richiesto (figura 7), occorre risolvere la seguente equazione

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))dx = Area(R)$$

ossia

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))dx = \sqrt[4]{e} - 1$$

$$\left[-e^{x-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{t} = \sqrt[4]{e} - 1\,.$$

Si ottiene l'equazione

$$-e^{t-t^2} = -1$$

che dà la soluzione (accettabile) $t = 1$.

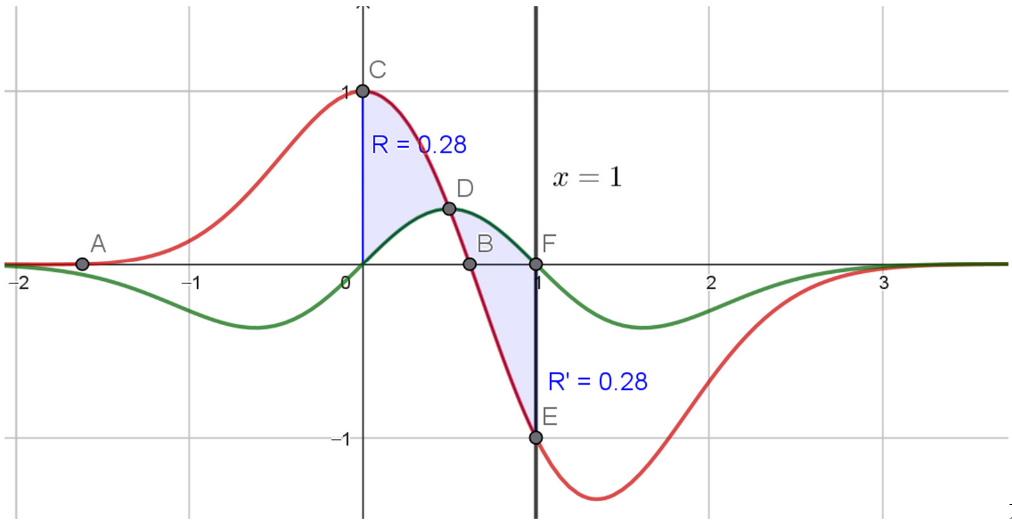


figura 7

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☒ Ambigua (per la figura)	☐ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		