

**Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico**  
**Prova scritta di Matematica - 19 giugno 2025**

**QUESITO 3** - soluzione a cura di Laura Rossi

3. L'opera futurista di Boccioni "Forme uniche della continuità nello spazio" del 1913, riportata sulla moneta da 20 centesimi, descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo evidenziato in figura, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tracciare il grafico di  $f$ , dopo averne analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo  $[-1; 2]$ .



**Soluzione**

Si tratta di una funzione definita a tratti.

Il primo tratto è un arco di parabola, funzione continua e derivabile in  $\mathbb{R}$  e in particolare in  $[-1, 0]$ .

Il secondo è un grafico deducibile dalla funzione  $y = \tan x$ , continua e derivabile in  $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; si ottiene traslando  $y = \tan x$  a sinistra di  $\frac{3}{4}\pi$  e in alto di 1; quindi la funzione

$y = 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$  risulta continua e derivabile in  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ , dunque in  $]0, 2]$ .

Per verificare la continuità della funzione a tratti  $y = f(x)$ , verifichiamo che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-4x^2 - 8x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right) = f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (-4x^2 - 8x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

quindi la funzione è continua in  $[-1, 2]$ .

Per studiare la derivabilità della funzione a tratti  $y = f(x)$ , calcoliamo le derivate dei 2 tratti:

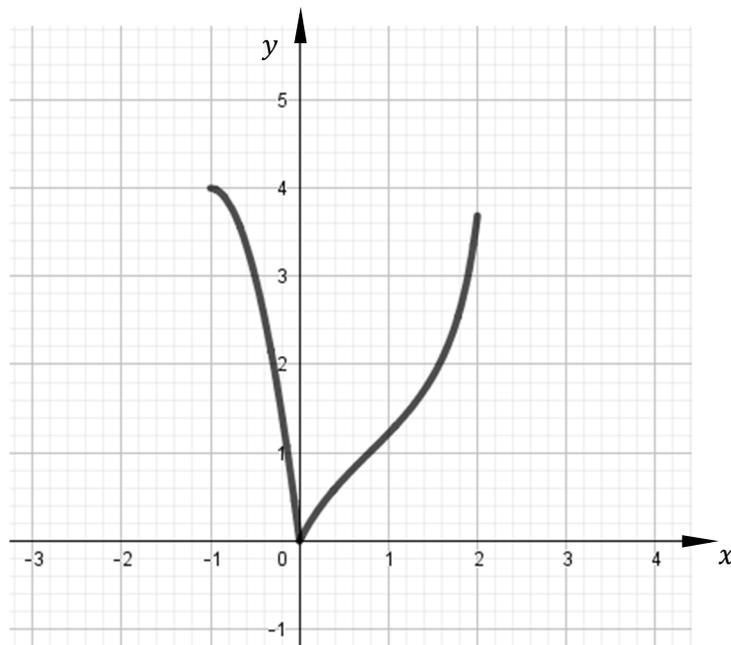
$$y' = \begin{cases} -8x - 8 & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)} & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Calcoliamo poi i limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-8x - 8) &= -8 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)} &= 2 \end{aligned}$$

poiché i limiti sono finiti e diversi, la funzione  $y = f(x)$  non è derivabile in  $x = 0$  e in esso presenta un punto angoloso.

Grafico della funzione  $y = f(x)$ :



**Tabella di analisi del quesito**

<b>Livello di difficoltà stimato</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto
<b>Formulazione del quesito</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta <input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
<b>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	
<b>L'argomento è presente nel QdR di Matematica</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	
<b>Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	
<b>È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?</b>	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre	
<b>Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente	
<b>Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	
			<input type="checkbox"/> Parzialmente	