

Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 19 giugno 2025

QUESITO 6 - soluzione a cura di Laura Rossi

6. Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x)dx = 9$.

Soluzione

Cerchiamo, per semplicità, una funzione polinomiale di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ che soddisfi le richieste.

Le condizioni da imporre sono:

$f(0) = 3$ (perché il punto di ascissa 0 appartenente alla retta tangente ha ordinata 3 ed è in comune alla funzione e alla retta),

$f'(0) = 2$ (perché il coefficiente angolare della retta tangente in $x = 0$ è 2) e

$$\int_0^3 f(x)dx = 9.$$

Dunque otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 3 \rightarrow c = 3 \\ f'(0) = 2 \rightarrow b = 2 \quad \text{essendo } f'(x) = 2ax + b \\ \int_0^3 f(x)dx = 9 \rightarrow a = -1 \quad \text{essendo } \int_0^3 (ax^2 + 2x + 3)dx = \left[a\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_0^3 = 9a + 18 \end{array} \right.$$

Una funzione polinomiale che soddisfa le richieste è quindi $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

In generale partendo da un polinomio di grado n con $n \in \mathbb{N}, n > 2$ si ottiene:

$$y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

le condizioni da imporre sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 3 \rightarrow a_n = 3 \\ f'(0) = 2 \rightarrow a_{n-1} = 2 \\ \int_0^3 f(x)dx = 9 \rightarrow \left[a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + a_2\frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + a_{n-2}\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^3 = 9 \end{array} \right.$$

ossia i coefficienti da a_0 a a_{n-2} devono soddisfare la condizione:

$$a_0\frac{3^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{3^n}{n} + a_2\frac{3^{n-1}}{n-1} + \dots + 9a_{n-2} + 9 + 9 = 9$$

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	<input checked="" type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del quesito	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta	<input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara

L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> Solo parzialmente	<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente