Sessione straordinaria 2025
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

COPIA CONFORME ATTI MIM

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri a, b, c in corrispondenza dei quali la funzione abbia il punto di massimo assoluto di coordinate $(4, 8)$ e uno zero in $x = 16$.

D'ora in avanti, si assuma $a = -2$, $b = 8$, $c = 0$.

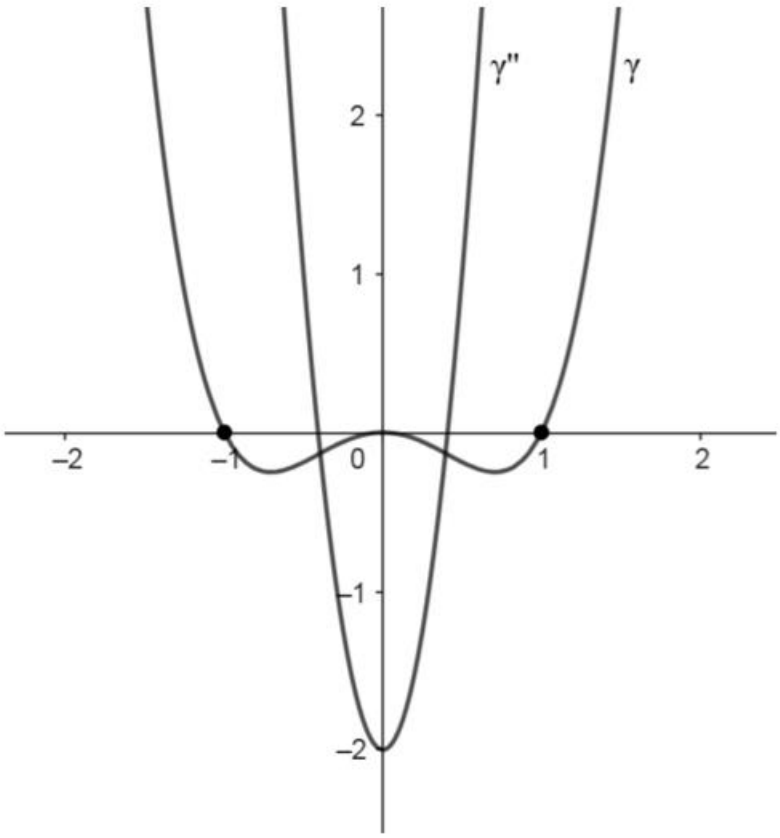
b) Studiare f e tracciare un suo grafico rappresentativo γ , dopo averne analizzato il segno, la derivabilità, la monotonia e la concavità. Verificare che la funzione non presenta asintoti. Al variare del parametro reale k , stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Spiegare perché f non è invertibile nel suo dominio e individuare l'intervallo limitato $[\alpha; \beta]$, di massima ampiezza, in cui può essere definita una funzione inversa g. Esprimere analiticamente la funzione g, specificare il suo dominio, le coordinate del punto a tangente verticale e tracciare un suo grafico rappresentativo.

d) Scrivere l'equazione della retta r , tangente a γ nel suo punto di ascissa 1. Calcolare l'area della regione delimitata da r, da γ e dall'asse delle ordinate. Dimostrare che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, definita per $x > 0$, presenta esattamente uno zero, un punto stazionario e un punto di flesso.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x P(t)dt$, con $-2 \leq x \leq 2$, in cui $P(t)$ indica un polinomio di terzo grado. I grafici γ e γ'' , in figura, sono rappresentativi di F ed F'', derivata seconda della funzione F.



COPIA CONFORME MIM

a) Utilizzare le informazioni che si possono ricavare da γ per determinare $P(t)$, considerando che F è una funzione pari e $F(2) = 12$.

D'ora in avanti, si ponga $P(t) = 4t^3 - 2t$.

b) Ricavare l'espressione analitica della funzione $F(x)$ e determinare le coordinate dei punti di minimo assoluto e dei punti di flesso. Utilizzare le informazioni ottenute su F per tracciare il grafico γ', rappresentativo della funzione F', derivata della funzione F .

c) Al variare dei parametri reali α, β, calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^\alpha}$ e $\lim_{x\to \pm 1}\frac{F(x)}{(x\pm 1)^\beta}$.

d) Sia P un punto di γ'', di ascissa positiva, e sia r_P la retta tangente a γ'' in P. Determinare le coordinate di P in modo che r_P formi con gli assi coordinati un triangolo di area minima. Successivamente, determinare le coordinate di P affinchè r_P formi con gli assi coordinati un triangolo isoscele.

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

QUESITI

1. Determinare il perimetro e l'area di un poligono regolare di lato 4 cm, sapendo che gli angoli interni sono ampi 150°.

2. Un'urna contiene 16 palline, numerate da 1 a 16. Vengono estratte in blocco 5 palline dall'urna; qual è la probabilità che il numero più grande tra quelli usciti sia maggiore di 9?

3. Quanti sono i numeri naturali di tre cifre tali che la cifra "8" compare almeno una volta? Quanti quelli in cui la cifra "0" compare almeno una volta?

4. Mostrare che, nello spazio tridimensionale, il piano di equazione $x + 2y - 3z - 7 = 0$ è tangente alla superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$ e stabilire le coordinate del punto di tangenza T. Scrivere, inoltre, l'equazione di una retta che sia tangente alla superficie S nel punto T.

5. Si consideri la famiglia di funzioni $f_k(x) = \ln(1 - kx) + kx^2$, dove k è un parametro reale non nullo. Determinare il valore di k in modo che il grafico della funzione abbia un punto di flesso a tangente orizzontale.

6. Sia γ il grafico rappresentativo della curva di equazione $xy = 3$. Determinare le coordinate del punto in cui la retta di equazione $y = 3x - 8$ è normale a γ.

7. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2e^{x^2-x} + a & \text{per } x \leq 1 \\ bx^2 + x + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$, determinare il valore dei parametri reali a, b, affinché la funzione sia continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

8. Dimostrare che la curva di equazione $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

COPIA CONFORME ATTI MIM

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.