Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 11 settembre 2025

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri a, b, c in corrispondenza dei quali la funzione abbia il punto di massimo assoluto di coordinate $(4, 8)$ e uno zero in $x = 16$.

D'ora in avanti, si assuma $a = -2$, $b = 8$, $c = 0$.

b) Studiare f e tracciare un suo grafico rappresentativo γ , dopo averne analizzato il segno, la derivabilità, la monotonia e la concavità. Verificare che la funzione non presenta asintoti. Al variare del parametro reale k , stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Spiegare perché f non è invertibile nel suo dominio e individuare l'intervallo limitato $[\alpha; \beta]$, di massima ampiezza, in cui può essere definita una funzione inversa g. Esprimere analiticamente la funzione g, specificare il suo dominio, le coordinate del punto a tangente verticale e tracciare un suo grafico rappresentativo.

d) Scrivere l'equazione della retta r , tangente a γ nel suo punto di ascissa 1. Calcolare l'area della regione delimitata da r, da γ e dall'asse delle ordinate. Dimostrare che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, definita per $x > 0$, presenta esattamente uno zero, un punto stazionario e un punto di flesso.

Soluzione

Punto a)

Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri a, b, c in corrispondenza dei quali la funzione abbia il punto di massimo assoluto di coordinate $(4, 8)$ e uno zero in $x = 16$.

La famiglia di funzioni ha per equazione

$$f(x) = ax + b\sqrt{x} + c\,.$$

Queste funzioni hanno tutte per dominio i numeri reali non negativi e sono continue in ogni punto del dominio.

Poiché $x = 16$ è uno zero, si ha

$$f(16) = 16a + 4b + c = 0\,.$$

Inoltre il punto di coordinate $(4, 8)$ deve appartenere al grafico; pertanto $f(4) = 8$, ossia

$$4a + 2b + c = 8.$$

Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}}$$

nel punto di massimo (relativo e) assoluto si ha:

$$f'(4) = 0$$

ossia

$$a + \frac{b}{4} = 0.$$

Si ottiene quindi il sistema lineare:

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + b = -4 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + b = -4 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 2a = -4 \end{cases}$$

e in definitiva

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione f ha questa espressione:

$$f(x) = -2x + 8\sqrt{x} = 2(-x + 4\sqrt{x}) .$$

Punto b)

D'ora in avanti, si assuma $a = -2$, $b = 8$, $c = 0$.

b) Studiare f e tracciare un suo grafico rappresentativo γ , dopo averne analizzato il segno, la derivabilità, la monotonia e la concavità. Verificare che la funzione non presenta asintoti. Al variare del parametro reale k , stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

$$f(x) = -2x + 8\sqrt{x} = 2(-x + 4\sqrt{x}) .$$

Come già detto, il dominio è formato dai numeri reali non negativi.

La funzione è positiva per $0 < x < 16$ ed è negativa per $x > 16$.

La funzione non ha asintoto orizzontale a destra, come si vede calcolando il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x + 8\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} x\left(-2 + \frac{8}{\sqrt{x}}\right) = -\infty.$$

Non ha nemmeno un asintoto obliquo; infatti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x + 8\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{8}{\sqrt{x}}\right) = -2$$

ma

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x + 8\sqrt{x} + 2x) = \lim_{x\to+\infty} 8\sqrt{x} = +\infty.$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = -2 + \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

La funzione non è quindi derivabile nell'origine degli assi. La retta tangente in tale punto è l'asse delle *y*.

Si ha $f'(x) \geq 0$ per

$$-2 + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 0,$$

da cui si ricava

$$\frac{2}{\sqrt{x}} \geq 1$$

cioè

$$\sqrt{x} \leq 2,$$

ossia per $0 < x < 4$. Si ha inoltre $f'(x) < 0$ per $x > 4$. Pertanto il punto di ascissa $x = 4$ è il punto di massimo relativo (e assoluto) della funzione, come sapevamo fin dall'inizio. Il massimo assoluto vale $f(4) = 8$.

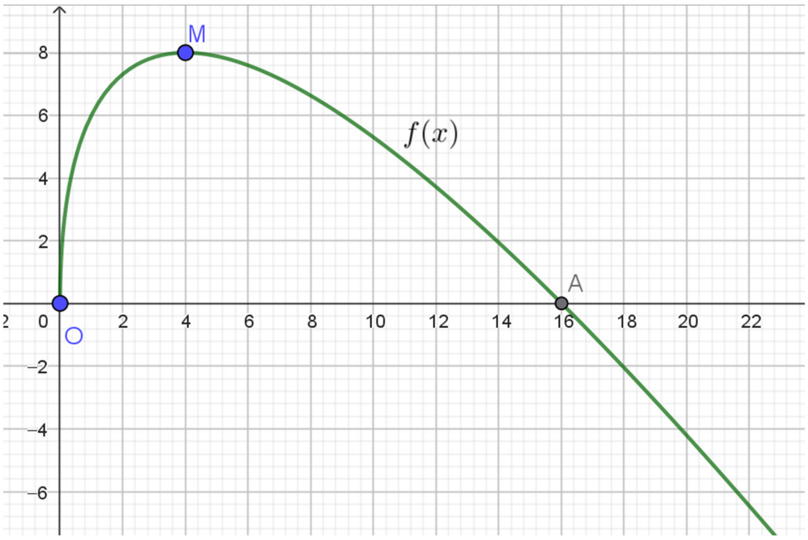

figura 1

La derivata seconda della funzione è

$$f''(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^3}}.$$

La derivata seconda non esiste nell'origine. Per $x > 0$ la derivata seconda è negativa; pertanto la funzione $f(x)$ è concava nel suo dominio (figura 1).

Intersechiamo il grafico della funzione $f(x)$ con il fascio di rette $y = k$ (figura 2).

Come si vede dalla figura, si conclude che

per $k > 8$, nessuna soluzione;

per $k = 8$ una soluzione doppia ($x = 4$);

per $0 \leq k < 8$ due soluzioni reali e distinte

per $k < 0$ una sola soluzione.

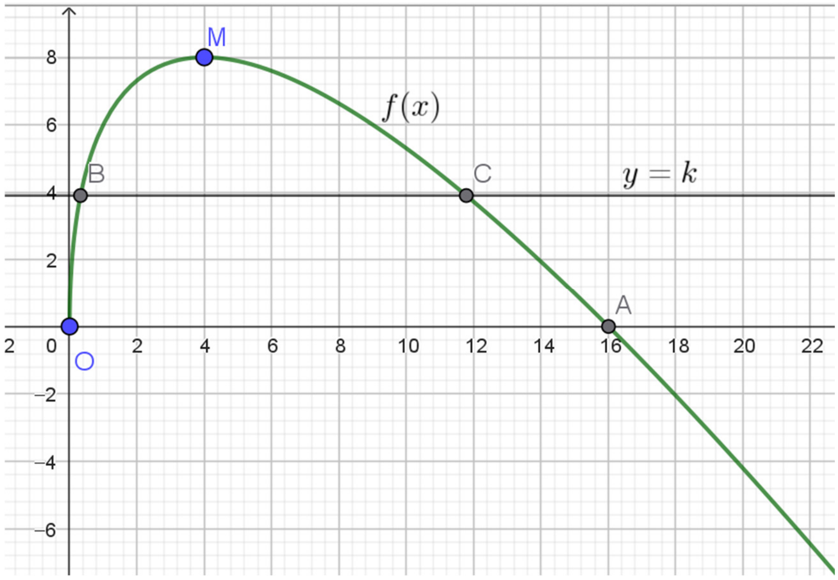

figura 2

Punto c)

c) Spiegare perché f non è invertibile nel suo dominio e individuare l'intervallo limitato $[\alpha; \beta]$, di massima ampiezza, in cui può essere definita una funzione inversa g. Esprimere analiticamente la funzione g, specificare il suo dominio, le coordinate del punto a tangente verticale e tracciare un suo grafico rappresentativo.

La funzione $f(x)$ non è iniettiva nel suo dominio. Per poter definire una funzione inversa $g(x)$ in un intervallo limitato, occorre fare una restrizione della funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso $[0, 4]$, che ha come immagine l'intervallo chiuso $[0,8]$.

Nell'intervallo $[0, 4]$ la funzione $f(x)$, come abbiamo visto in precedenza, è crescente in senso stretto. Pertanto è invertibile e si ottiene come funzione inversa una funzione che indichiamo con $g(x)$, che ha come dominio l'intervallo $[0,8]$. Quest'ultimo è forse l'intervallo l'intervallo limitato richiesto dal testo.

Osservazione. Non esiste *l'intervallo limitato di massima ampiezza* in cui la funzione $f(x)$ è invertibile, perché la funzione è invertibile anche nell'intervallo $[4, +\infty[$, in cui è monotona decrescente in senso stretto. Per esempio la funzione $f(x)$ è invertibile in un qualunque intervallo limitato del tipo $[4, \beta]$, con $\beta > 4$ e quindi non esiste un intervallo di massima ampiezza in cui la funzione sia invertibile.

Pertanto *non esiste l'intervallo limitato di ampiezza massima in cui possa essere definita una funzione* inversa g.

Poiché il testo è errato, scegliamo come funzione da invertire la funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso $[0, 4]$. La sua inversa $g(x)$ ha come dominio $[0, 8]$ e come immagine del dominio l'intervallo $[0, 4]$. Nel punto A' la retta tangente è parallela all'asse y ed ha equazione $x = 8$ (tangente chiamata "verticale" nel testo). Pertanto questo punto è di non derivabilità per la funzione g (figura 3).

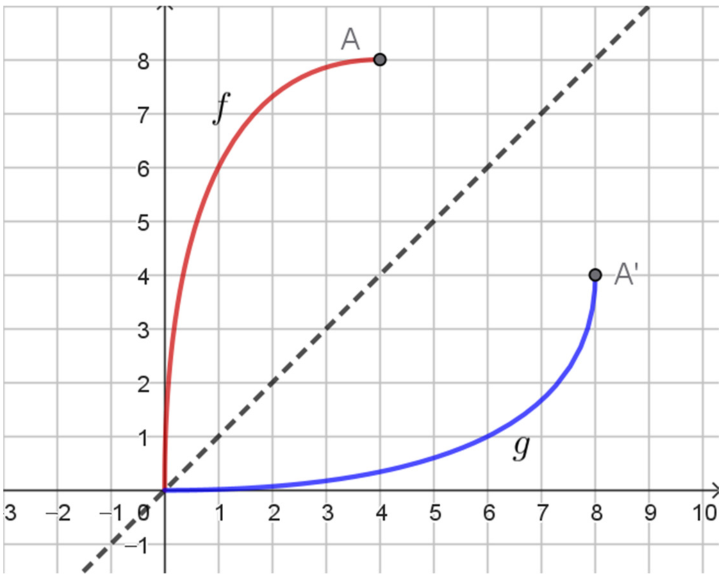

figura 3

Per determinare una espressione analitica della funzione $g(x)$, risolviamo l'equazione

$$y = -2x + 8\sqrt{x}\,.$$

Posto $\sqrt{x} = t$ (con $x \geq 0$) otteniamo

$$2t^2 - 8t + y = 0$$

che ha le soluzioni

$$t = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16 - 2y}\right)$$

ossia

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16 - 2y}\right)$$

che, elevando al quadrato, fornisce

$$x = \frac{1}{4}\left(4 \pm \sqrt{16 - 2y}\,\right)^2$$

e scambiando le variabili:

$$y = \frac{1}{4}\left(4 \pm \sqrt{16 - 2x}\,\right)^2.$$

Poiché deve essere $0 \leq y \leq 4$, si ha di conseguenza

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(4 - \sqrt{16 - 2x}\,\right)^2.$$

Punto d)

d) Scrivere l'equazione della retta r , tangente a γ nel suo punto di ascissa 1. Calcolare l'area della regione delimitata da r, da γ e dall'asse delle ordinate. Dimostrare che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, definita per $x > 0$, presenta esattamente uno zero, un punto stazionario e un punto di flesso.

Si ha $f(1) = 6$. Poiché inoltre

$$f'(x) = -2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

si ha $f'(1) = 2$.

Pertanto la retta r tangente a γ nel suo punto $x = 1$ ha equazione $y - 6 = 2(x - 1)$, ossia esplicitando, $y = 2x + 4$.

L'area della regione delimitata da r¸ da γ e dall'asse delle ordinate (figura 4) è quindi

$$A\,rea(S) = \int_0^1 \left(2x + 4 - \left(-2x + 8\sqrt{x}\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(4x + 4 - 8\sqrt{x}\right) dx = \left[2x^2 + 4x - \frac{16}{3}\sqrt[3]{x^2}\right]_0^1 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}.$$

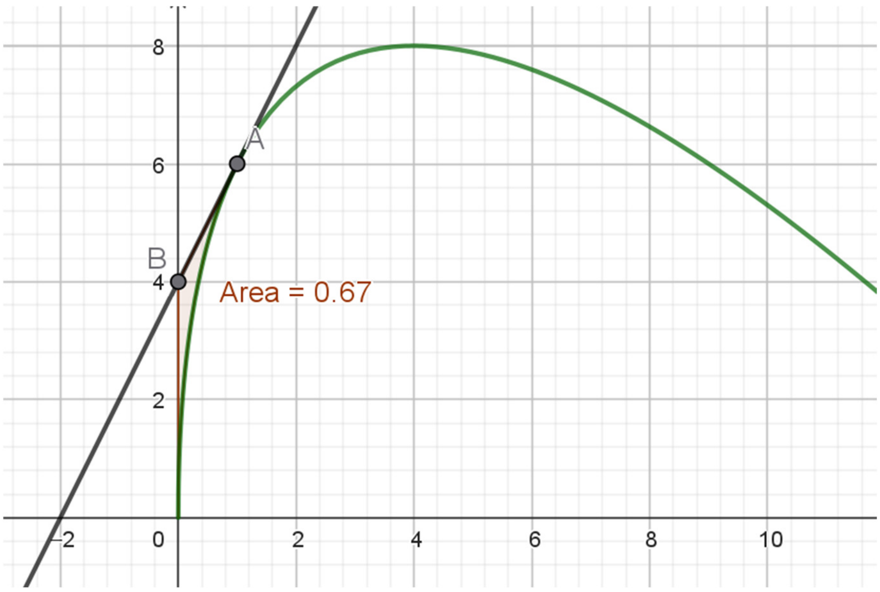

figura4

Consideriamo infine la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (\text{per } x > 0).$$

Questa funzione può essere calcolata esplicitamente. Si ha quindi (per $x > 0$)

$$F(x) = \int_0^x \left(-2t + 8\sqrt{t}\right) dt = \left[-t^2 + \frac{16}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^x = -x^2 + \frac{16}{3}\sqrt{x^3}\,.$$

Per trovare gli zeri (con $x > 0$) di questa funzione dobbiamo risolvere l'equazione $F(x) = 0$, ossia

$$-x^2 + \frac{16}{3}\sqrt{x^3} = 0.$$

Si ottiene $x = 0$ (non accettabile), oppure

$$-x + \frac{16}{3}\sqrt{x} = 0$$

ossia

$$\frac{16}{3}\sqrt{x} = x$$

$$\frac{256}{9}x = x^2$$

da cui si ricava l'unica soluzione accettabile (figura 5)

$$x = \frac{256}{9}.$$

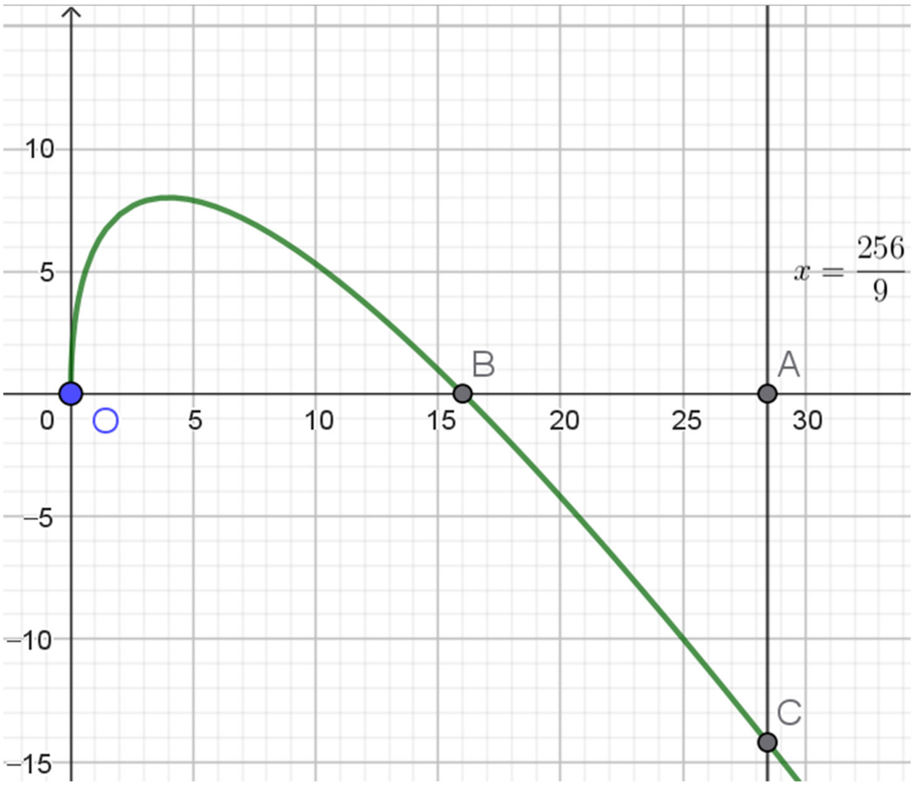

figura 5

Per determinare i punti stazionari di $F(x)$ dobbiamo porre $F'(x) = 0$, ossia $f(x) = -2x + 8\sqrt{x} = 0$; si ha pertanto

$$-x + 4\sqrt{x} = 0 \quad (\text{con } x > 0)$$

Si ottiene l'equazione $x = 4\sqrt{x}$. Data l'ipotesi $x > 0$, si ottiene $x^2 = 16x$ e la soluzione $x = 16$, che è l'ascissa del punto di massimo della funzione $F(x)$.

Per determinare i punti di flesso di $F(x)$ occorre risolvere l'equazione $F''(x) = 0$; si ottiene quindi

$$F''(x) = f'(x) = -2 + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

ossia $\sqrt{x} = 2$ e in definiva $x = 4$, che si poteva anche dire immediatamente, essendo $x = 4$ il punto di massimo della $f(x)$.

Il grafico della funzione integrale $F(x)$ è riportato nella figura 6 (si noti che la scala sull'asse *y* è diversa da quella sull'asse *x*).

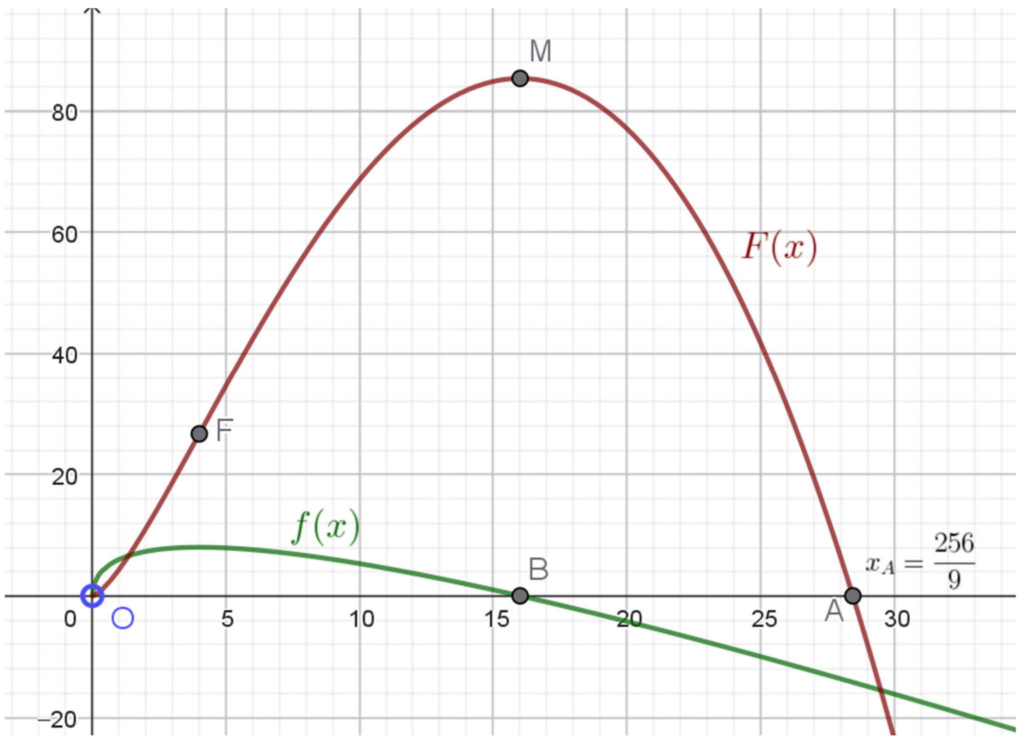

figura 6

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio/Alto	☒ Alto	☐ Molto alto (punto c)	
Formulazione del problema	☒ Scorretta (punto c)	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre	

È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente