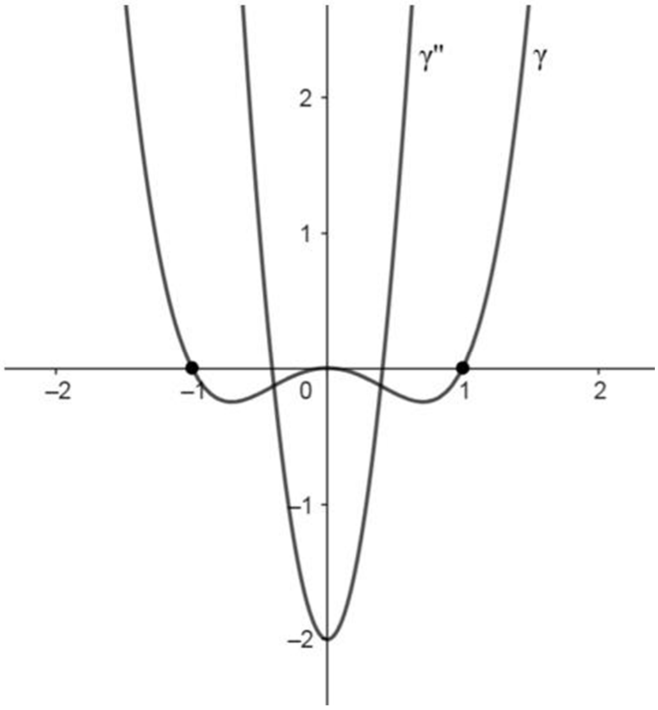
Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 11 settembre 2025

PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi

Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x P(t)dt$, con $-2 \leq x \leq 2$, in cui $P(t)$ indica un polinomio di terzo grado. I grafici γ e $\gamma"$, in figura, sono rappresentativi di F ed $F"$, derivata seconda della funzione F.



a) Utilizzare le informazioni che si possono ricavare da γ per determinare $P(t)$, considerando che F è una funzione pari e $F(2) = 12$.

D'ora in avanti, si ponga $P(t) = 4t^3 - 2t$.

b) Ricavare l'espressione analitica della funzione $F(x)$ e determinare le coordinate dei punti di minimo assoluto e dei punti di flesso. Utilizzare le informazioni ottenute su F per tracciare il grafico γ', rappresentativo della funzione F', derivata della funzione F .

c) Al variare dei parametri reali α, β, calcolare $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^\alpha}$ e $\lim\limits_{x \to \pm 1} \frac{F(x)}{(x \pm 1)^\beta}$.

d) Sia P un punto di $\gamma"$, di ascissa positiva, e sia r_P la retta tangente a $\gamma"$ in P. Determinare le coordinate di P in modo che r_P formi con gli assi coordinati un triangolo di area minima. Successivamente, determinare le coordinate di P affinchè r_P formi con gli assi coordinati un triangolo isoscele.

Soluzione

Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x P(t)dt$, con $-2 \leq x \leq 2$, in cui $P(t)$ indica un polinomio di terzo grado. I grafici γ e $\gamma"$, in figura, sono rappresentativi di F ed $F"$, derivata seconda della funzione F.

Punto a)

a) Utilizzare le informazioni che si possono ricavare da γ per determinare $P(t)$, considerando che F è una funzione pari e $F(2) = 12$.

Poiché la funzione $F(x)$ è pari, la funzione polinomiale $P(x) = F'(x)$ deve essere dispari e la funzione $F''(x) = P'(x)$ deve essere pari. Pertanto si ha

$$P(x) = F'(x) = ax^3 + bx$$

$$F''(x) = 3ax^2 + b.$$

Poiché deve essere $F''(0) = -2$, si ha $b = -2$.

Inoltre si ha:

$$F(2) = \int_0^2 (ax^3 + bx)dx = 12.$$

Pertanto

$$\left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2\right]_0^2 = 12$$

da cui si ricava

$$4a + 2b = 12,$$

ossia $2a + b = 6$ e di conseguenza $a = 4$.

Si ottiene quindi (figura 1):

$$P(x) = F'(x) = 4x^3 - 2x$$

$$F(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$$

$$F''(x) = 12x^2 - 2.$$

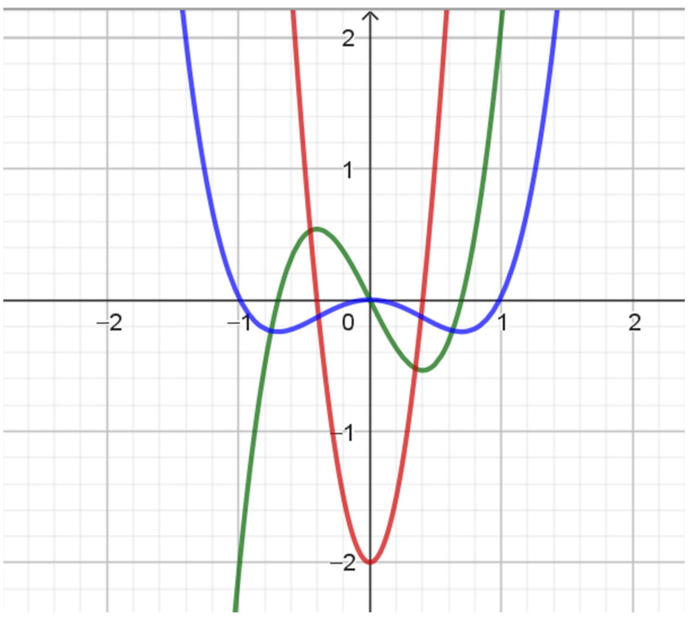


figura 1

Punto b)

D'ora in avanti, si ponga $P(t) = 4t^3 - 2t$.

b) Ricavare l'espressione analitica della funzione $F(x)$ e determinare le coordinate dei punti di minimo assoluto e dei punti di flesso. Utilizzare le informazioni ottenute su F per tracciare il grafico γ', rappresentativo della funzione F', derivata della funzione F .

Poiché

$$P(x) = F'(x) = 4x^3 - 2x$$

l'espressione analitica della funzione integrale è

$$F(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1),$$

da esaminare nell'intervallo $-2 \leq x \leq 2$.

La funzione polinomiale $F(x)$, come detto nel testo, è pari. La sua derivata prima è

$$F'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1).$$

Nel dominio assegnato $[-2,2]$, la derivata prima è positiva per $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 2$ e nell'intervallo $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$. Pertanto la funzione $F(x)$ ha un massimo relativo per $x = 0$ e minimi relativi (e assoluti) in $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il minimo assoluto vale $F\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

La derivata seconda è

$$F''(x) = 12x^2 - 2 = 2(6x^2 - 1).$$

La derivata seconda è positiva per valori esterni all'intervallo $-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{1}{\sqrt{6}}$ ed è negativa per valori interni a tale intervallo. Pertanto i punti di ascisse $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ sono i punti di flesso della $F(x)$. In tali punti si ha

$$F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{36}.$$

Il grafico della funzione $F(x)$ è rappresentato in figura 2.

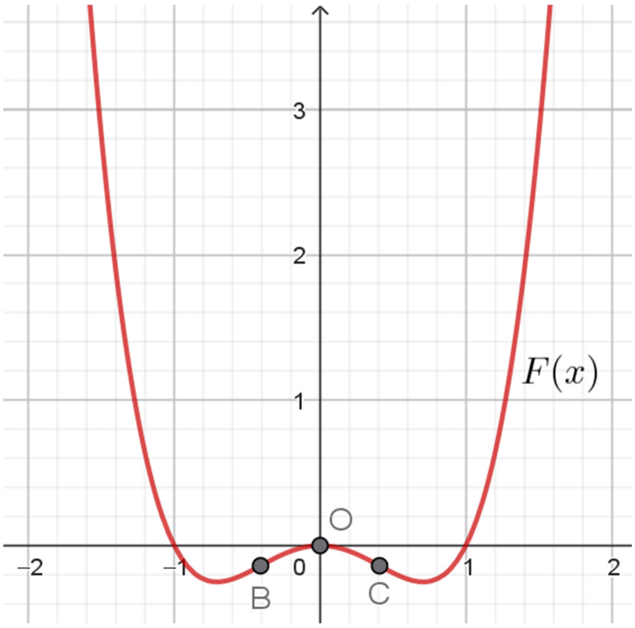


figura 2

Poiché la funzione $F(x)$ è pari, la funzione $F'(x)$ è dispari.

I punti di massimo e di minimo della funzione $F(x)$ sono gli zeri della funzione $F'(x)$.

I punti di flesso della funzione $F(x)$ sono i punti di massimo e di minimo della funzione $F'(x)$.

La derivata seconda della funzione $F'(x)$ è $F'''(x) = 24x$. Pertanto la funzione $F'(x)$ ha un flesso per $x = 0$. Il grafico della $F'(x)$ è indicato in figura 3.

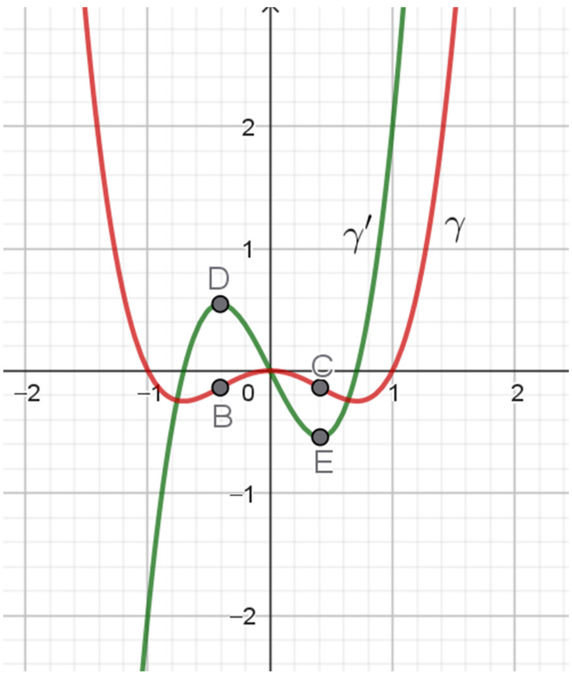


figura 3.

Punto c)

c) Al variare dei parametri reali α, β, calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^\alpha}$ e $\lim_{x\to \pm 1} \frac{F(x)}{(x\pm 1)^\beta}$.

Consideriamo il primo limite parametrico:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^2}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-1)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\left(x^{2-\alpha}(x^2-1)\right).$$

Per $\alpha < 2$, si ha $\quad \lim_{x\to 0} x^{2-\alpha}(x^2-1)=0.$

Per $\alpha = 2$, si ha $\quad \lim_{x\to 0} x^{2-\alpha}(x^2-1)=\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1.$

Per $\alpha > 2$, si ha $\quad \lim_{x\to 0^+} x^{2-\alpha}(x^2-1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x^{\alpha-2}}=-\infty.$

Calcoliamo ora gli altri limiti parametrici.

Per $x\to 1$, si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{(x-1)^\beta}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x^2-1)}{(x-1)^\beta}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)(x+1)}{(x-1)^\beta}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^{\beta-1}}$$

Per $\beta < 1$, si ha $\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^{\beta-1}}=0.$

Per $\beta = 1$, si ha $\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^{\beta-1}}=\lim_{x\to 1}x^2(x+1)=2.$

Per $\beta > 1$, si ha $\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^{\beta-1}}=+\infty \quad$ e $\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^{\beta-1}}=-\infty.$

Per $x\to -1$, si ha:

$$\lim_{x\to -1}\frac{F(x)}{(x+1)^\beta}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2(x^2-1)}{(x+1)^\beta}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2(x-1)(x+1)}{(x+1)^\beta}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^{\beta-1}}$$

Per $\beta < 1$, si ha $\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^{\beta-1}}=0.$

Per $\beta = 1$, si ha $\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^{\beta-1}}=\lim_{x\to 1}x^2(x-1)=-2.$

Per $\beta > 1$, si ha $\quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^{\beta-1}}=-\infty \quad$ e $\quad \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^{\beta-1}}=+\infty.$

Punto d)

d) Sia P un punto di γ", di ascissa positiva, e sia r_P la retta tangente a γ" in P. Determinare le coordinate di P in modo che r_P formi con gli assi coordinati un triangolo di area minima. Successivamente, determinare le coordinate di P affinchè r_P formi con gli assi coordinati un triangolo isoscele.

Consideriamo un punto P di ascissa positiva sulla curva γ''.

Le coordinate del punto $P(t, 12t^2 - 2)$. La retta tangente ha pendenza $m = 24t$. Pertanto la retta tangente in *P* ha equazione

$$y - 12t^2 + 2 = 24t(x - t)$$

ossia

$$y = 24tx - 12t^2 - 2$$

Il punto *B* di intersezione con l'asse *x* ha coordinate

$$\left(\frac{12t^2 + 2}{24t}, 0\right)$$

Il punto *C* di intersezione con l'asse *y* ha coordinate

$$(0, -12t^2 - 2).$$

L'area del triangolo *OBC* sarà:

$$S(t) = \frac{(12t^2 + 2)^2}{48t}.$$

La derivata prima è:

$$S'(t) = \frac{1}{48} \cdot \frac{2(12t^2 + 2)(24t^2) - (12t^2 + 2)^2}{t^2}.$$

$$S'(t) = \frac{1}{48} \cdot \frac{(12t^2 + 2)(48t^2 - 12t^2 - 2)}{t^2}.$$

$$S'(t) = \frac{1}{48} \frac{(12t^2 + 2)(36t^2 - 2)}{t^2}.$$

La derivata prima si annulla (nell'ipotesi $t > 0$) se $t = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Quindi l'area del triangolo è minima per $t = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Il punto *P* ha quindi coordinate

$$P\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}; -\frac{4}{3}\right).$$

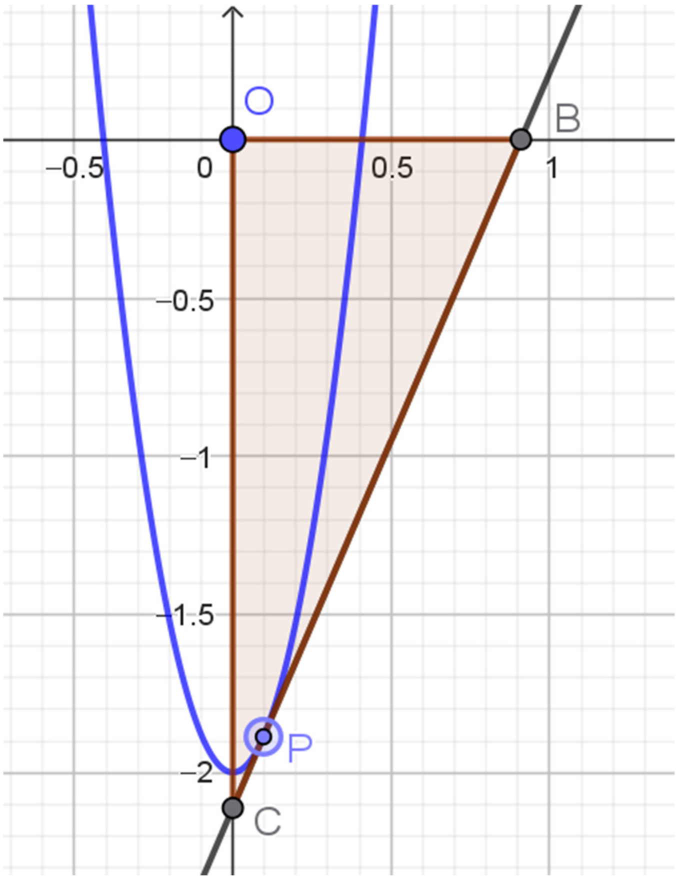


figura 4

Infine il triangolo *OBC* è isoscele se e solo se

$$\frac{12t^2+2}{24t} = 12t^2+2$$

$$\frac{1}{24t} = 1$$

e quindi

$$t = \frac{1}{24}.$$

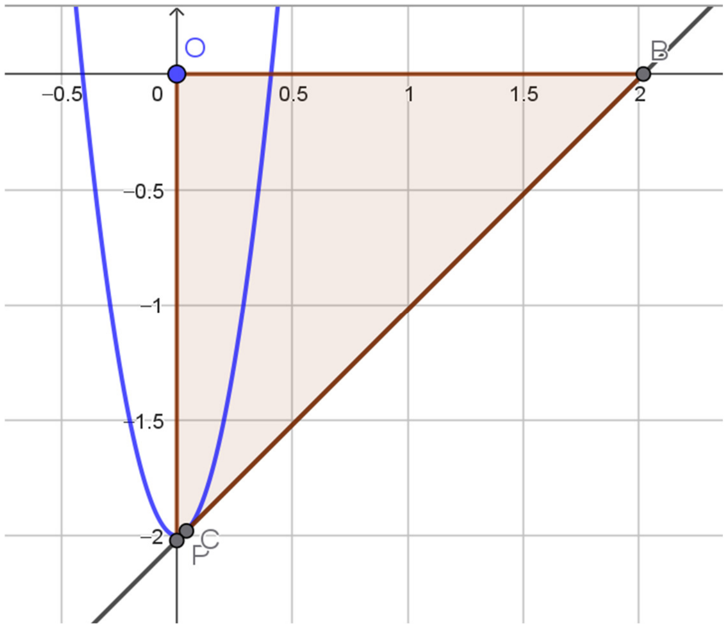


figura 5

Commento. Problema molto laborioso e pieno di calcoli. In particolare il punto c) va al di fuori del Quadro di Riferimento.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☐ Sì	☐ No	☒ Non è esplicitato / Non è chiaro (punto c)		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☒ Non sempre	☐ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		