

Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 11 settembre 2025

QUESITO 4 - soluzione di L. Rossi

4. Mostrare che, nello spazio tridimensionale, il piano di equazione $x + 2y - 3z - 7 = 0$ è tangente alla superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$ e stabilire le coordinate del punto di tangenza T . Scrivere, inoltre, l'equazione di una retta che sia tangente alla superficie S nel punto T .

Soluzione

La superficie sferica scritta in forma “esplicita” ha equazione:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 14$$

ha quindi centro $C(1, -1, 2)$ e raggio $r = \sqrt{14}$.

Per mostrare che il piano α e la superficie sferica S sono tangenti, verifichiamo che la distanza d del centro della superficie sferica dal piano α è uguale al raggio:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} = r$$

Per trovare il punto di tangenza intersechiamo la retta normale al piano passante per C le cui equazioni parametriche con $t \in R$ sono:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

con la superficie sferica:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 14 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo: $t = -1$ o $t = 1$ ossia i punti di intersezione sono $T_1(0, -3, 5)$ e $T_2(2, 1, -1)$. Il punto di tangenza deve appartenere al piano α quindi è $T(2, 1, -1)$.

Di rette tangenti alla superficie sferica in T ne esistono infinite, tutte appartenenti al piano α . Per trovarne una scegliamo un punto del piano α diverso da T , ad esempio $A(1, 3, 0)$ e determiniamo la retta passante per i due punti A e T il cui vettore direzione sarà $\vec{v}(-1, 2, 1)$.

Le equazioni parametriche della retta saranno quindi:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Tabella di analisi del quesito

| | | | | | |
|---|--|---|--------------------------------------|-------------------------------------|---|
| Livello di difficoltà stimato | <input type="checkbox"/> Basso | <input checked="" type="checkbox"/> Medio | <input type="checkbox"/> Alto | <input type="checkbox"/> Molto alto | |
| Formulazione del quesito | <input type="checkbox"/> Scorretta | <input type="checkbox"/> Ambigua | <input type="checkbox"/> Poco chiara | <input type="checkbox"/> Corretta | <input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara |
| L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | | <input type="checkbox"/> No | | <input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro |

| | | | |
|--|--|--|---|
| L'argomento è presente nel QdR di Matematica | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro |
| Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non sempre |
| È un argomento presente nei libri di testo di Matematica? | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non sempre | <input checked="" type="checkbox"/> Sempre |
| Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> Solo parzialmente | <input type="checkbox"/> No |
| Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica? | <input type="checkbox"/> Sì | <input checked="" type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Parzialmente |